Soluciones a los ejercicios de Álgebra, primera parte:

Ejercicio 1

Completa:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-3xz$	-3	xz	2
$12x^3zy^2$	12	x^3zy^2	6
abc^4	1	abc^4	6
$\frac{5x}{2}$	$\frac{5}{2}$	x	1

Ejercicio 2

Halla el valor numérico de la siguiente expresión que proporciona el área de la corona circular, sabiendo que el radio menor es $r = 3\ cm$ y el radio mayor es $R = 7\ cm$:

$A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$ $\qquad A = \pi\left(49 - 9\right) = \boxed{40\pi cm^2}$

Ejercicio 3

Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

$a)\quad P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, para $x = 2$; $\qquad P(2) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = \boxed{9}$

$b)\quad P(x) = 5x - 3$, para $x = -1$ $\qquad P(-1) = 5\cdot(-1) - 3 = \boxed{-8}$

$c)\quad P(x) = -2x - 9$, para $x = -2$ $\qquad P(-2) = -2\cdot(-2) - 9 = \boxed{-5}$

$d)\quad P(x) = -x^2 + 2x + 4$, para $x = 3$ $\qquad P(3) = -3^2 + 2\cdot 3 + 4 = -9 + 6 + 4 = \boxed{1}$

$e)\quad P(x) = -x^2 + 5$, para $x = -1$ $\qquad P(-1) = -(-1)^2 + 5 = -1 + 5 = \boxed{4}$

$f)\quad P(x,y) = xy - 2$, para $x = 1,\ y = 2$ $\qquad P(1,2) = 1\cdot 2 - 2 = \boxed{0}$

$g)\quad P(x,y) = \frac{2x}{5y} - 3x$, para $x = 5,\ y = 1$ $\qquad P(5,1) = \frac{2\cdot 5}{5\cdot 1} - 3\cdot 5 = \boxed{-13}$

$h)\quad P(x,y) = \frac{(x-2)\cdot(y+5)}{x+y}$, para $x = 3,\ y = -4$ $\qquad P(3,-4) = \frac{(3-2)\cdot(-4+5)}{3-4} = \frac{1\cdot 1}{-1} = \boxed{-1}$

$i)\quad P(x,y) = \frac{x^2 + 2xy - 1}{xy^2 + 3}$, para $x = -1,\ y = 3$ $\qquad P(-1,3) = \frac{(-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot 3 - 1}{(-1)\cdot 3^2 + 3} = \frac{1 - 6 - 1}{-9 + 3} = \boxed{1}$

$j)\quad P(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{2x-1}$, para $x=1,\ y=2$ $\qquad P(1,2)=\dfrac{(1+2)^2}{2(1)-1}=\dfrac{3^2}{2-1}=\boxed{9}$

$k)\quad P(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy}-x\sqrt{xy}}{y\sqrt{x^2}}$, para $x=2;\ y=2$ $\quad P(2,2)=\dfrac{\sqrt{4}-2\cdot\sqrt{4}}{2\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{2-2\cdot 2}{2\cdot 2}=\boxed{\dfrac{-1}{2}}$

Ejercicio 4

Halla el valor numérico de la siguiente expresión algebraica:

$a)\quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, para $a=1;\, b=-2;\, c=-3$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_1=3;\quad x_2=-1}$$

$b)$ El mismo pero con $c=3$:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\nexists$$

$c)$ El mismo pero con $c=1$:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{-2\pm 0}{2}=-1(doble)$$

Ejercicio 5

Realiza las siguientes operaciones:

$a)\quad 3x^2+2x+5x^2-3x=$ $\qquad \boxed{8x^2-x}$

$b)\quad 5x^2y+4x^2+3xy^2-2x^2y-xy^2=$ $\qquad \boxed{3x^2y+4x^2+2xy^2}$

$c)\quad \dfrac{1}{3}xy+\dfrac{2}{3}x^3y^2-\dfrac{1}{6}xy+\dfrac{2}{3}x^3y^2=$ $\qquad \boxed{\dfrac{1}{6}xy+\dfrac{4}{6}x^3y^2}$

$d)\quad ax^2-by^2+2x^2+by^2=$ $\qquad \boxed{ax^2+2x^2=(a+2)x^2}$

$e)\quad 5b+2b-\dfrac{b}{3}=$ $\qquad \left(7-\dfrac{1}{3}\right)b=\boxed{\dfrac{20}{3}b}$

$f)\quad zy+\dfrac{5}{11}zy=$ $\qquad \left(1+\dfrac{5}{11}\right)zy=\boxed{\dfrac{16}{11}zy}$

(R) Ejercicio 6

Realiza las siguientes operaciones:

$a)\quad \left(3xy^3\right)\left(4x^2y\right)= \qquad \boxed{12x^3y^4}$

$b)\quad \left(5x^2y\right)\left(-2x\right)= \qquad \boxed{-10x^3y}$

$c)\quad \left(-4x^2y^3\right)\left(-2xy^3\right)= \qquad \boxed{8x^3y^6}$

$d)\quad \left(\frac{3}{2}y\right)\left(-\frac{1}{2}x\right)= \qquad \boxed{-\frac{3}{4}xy}$

$e)\quad xy\cdot 4xz\cdot 3xyz= \qquad \boxed{12x^3y^2z^2}$

$f)\quad 5z^2\cdot 9x^3\cdot z^7= \qquad \boxed{45x^3z^9}$

(R) Ejercicio 7

Efectúa los productos y simplifica cuando sea posible (trabaja en línea):

$a)\quad \left(3x^2+x-2\right)\left(x^2+3x-1\right)=3x^4+9x^3-3x^2+x^3+3x^2-x-2x^2-6x+2=$

$=\boxed{3x^4+10x^3-2x^2-7x+2}$

$b)\quad (3x-4)\left(2x^2+2x-5\right)=\boxed{6x^3-2x^2-23x+20}$

$c)\quad \left(7x^3-5x+2\right)\left(2x^2+5x-1\right)=\boxed{14x^5+35x^4-17x^3-21x^2+15x-2}$

$d)\quad (x-2)(x+2)(x-3)=\boxed{x^3-3x^2-4x+12}$

$e)\quad \left(4x^3-2x^2+x-1\right)\left(x^2+3\right)=\boxed{4x^5-2x^4+13x^3-7x^2+3x-3}$

(R) Ejercicio 8

Resuelve las siguientes divisiones:

$a)\quad \left(3abc^3\right):\left(12ab^2c^3\right)=\frac{3abc^3}{12ab^2c^3}=\boxed{\frac{1}{4b}}$

$$b)\quad \frac{25x^3yz^2}{5xy^2z} = \boxed{\frac{5x^2z}{y}}$$

$$c)\quad \left(mn^2\right):\left(m^2n\right) = \frac{m \cdot n^2}{m^2 \cdot n} = \boxed{\frac{n}{m}}$$

$$d)\quad \left(\frac{5x}{2}\right):\left(x^2z^2\right) = = \frac{5x}{2x^2z^2} = \boxed{\frac{5}{2xz^2}}$$

$$e)\quad \frac{3b^2a^3}{6ba^4} = \boxed{\frac{b}{2a}}$$

$$f)\quad \frac{15x^3y}{5xy^2z^3} = \boxed{\frac{3x^2}{yz^3}}$$

$$g)\quad \frac{14x^3y^5z^4}{7x^2y^2z} = \boxed{2xy^3z^3}$$

Ejercicio 9

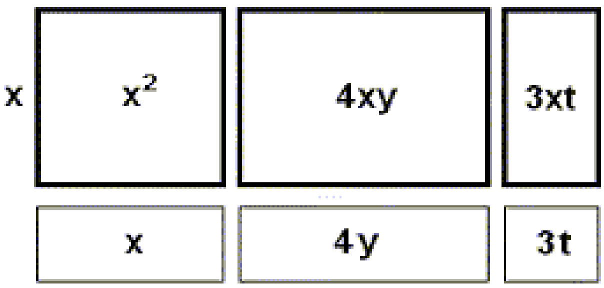
Dividir los siguientes polinomios:

$$a)\quad \frac{8a^2bc - 4a^3b^4c^2 + 2abc}{2ab} = \boxed{4ac - 2a^2b^3c^2 + c}$$

$$b)\quad \left(12x^3 - 9x^2 + 3x\right):3x = \boxed{4x^2 - 3x + 1}$$

Ejercicio 10

Conoces las áreas de estos rectángulos y sus alturas. ¿Cuánto valen las bases?



¿Qué operación has aplicado?

La división de monomios

Ejercicio 11

Completa:

D(x) | d(x) ← Polinomio divisor

Polinomio dividendo → D(x)

⋮

C(x) ← Polinomio cociente

R(x) ← Polinomio resto

Para que la división pueda llevarse a cabo, el grado del dividendo debe ser __mayor__ o __igual__ que el grado del divisor

Ejercicio 12

Contesta:

¿De qué grado será, en general, el polinomio cociente?

El grado del cociente será el de la diferencia entre el grado del dividendo y el grado divisor.

¿y el grado del resto?

Siempre será menor que el grado del divisor

¿Cuándo acaba el proceso?

Cuando el grado del resto sea menor que el del divisor.

¿Cómo se hace la prueba de la división? $D(x)=d(x)\cdot C(x)+R(x)$

Ejercicio 13

Haz la prueba de la división del ejercicio resuelto anterior:

$D(x)=5x^3+x^2-3$

$d(x)=x-2$

$C(x)=5x^2+11x+22$

$R(x)=41$

$$(x-2)(5x^2+11x+22)+41=5x^3+11x^2+22x-10x^2-22x-44+41=$$
$$5x^3+x^2-3=D(x)$$

(R) Ejercicio 14

Haz las siguientes divisiones:

$a)\quad 2x^4 \quad -7x^2 \quad +5x \quad -2 \quad \underline{|x^2+2x-1}$

$C(x)=2x^2-4x+3$

$R(x)=-5x+1$

$b)\quad 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3 \;\big|\; x+1$

$$C(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x$$
$$R(x) = 3$$

$c)\quad x^3 + 4x^2 + 6 \;\big|\; x-4$

$$C(x) = x^2 + 8x + 32$$
$$R(x) = 134$$

Ejercicio 15

Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

$a)\quad (3x-y)(4x^2+2y)-3x(y+2x)=$ $\boxed{12x^3-4x^2y-6x^2+3xy-2y^2}$

$b)\quad x^3-y^3-(x-y)^3=$ $\boxed{3x^2y-3xy^2=3xy(x-y)}$

$c)\quad (a^2+b^2)(a^2-b^2)(a+b)-(a^3-b^3)ab=$ $\boxed{a^5-b^5}$

$d)\quad x-\left(3y-\dfrac{2x}{3}-4\right)-\dfrac{5}{3}\left(x-\dfrac{9}{5}y+\dfrac{3}{10}\right)=$ $\boxed{\dfrac{7}{2}}$

$e)\quad \left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)+x\left(\dfrac{2}{3}+y\right)-y\left(\dfrac{3}{2}+x\right)=$ $\boxed{\dfrac{7x-11y}{6}}$

$f)\quad x(y+z)(y-z)+y(x+z)(x-z)+z(x+y)(x-y)-$
$-z(y+x)(y-x)-y(z+x)(z-x)-x(z+y)(z-y)=$

$\boxed{2x^2y+2x^2z+2xy^2-2xz^2-2y^2z-2yz^2}$

Ejercicio 16

Resuelve las siguientes operaciones y simplifica:

$a)\quad 2\cdot(x^2+2x^2)-5\cdot(-x^2-3x^2)=2\cdot 3x^2-5\cdot(-4x^2)=6x^2+20x^2=\boxed{26x^2}$

$b)\quad (x+1)^2+(x+1)(x-1)=x^2+2x+1+x^2-1=\boxed{2x^2+2x=2x(x+1)}$

$c)\quad (x-2)^2-(x-2)(x+2)=\boxed{-4x+8}=4(2-x)$

Ejercicio 17

Demuestra si $16-\left(\sqrt{2}-5\right)^2=\left(9-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

Al tratarse de una demostración, deberemos comprobar si, tras operar, en ambos lados de la ecuación de arriba, queda la misma expresión:

$$16-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{2}+5^2\right)=9\cdot\sqrt{2}-9-\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2};$$

$$16-2+10\sqrt{2}-25=9\sqrt{2}-9-2+\sqrt{2};$$

$-11+10\sqrt{2}=10\sqrt{2}-11;$ Ambas expresiones son iguales.

(R) Ejercicio 18

Extrae factor común:

$a)\quad 2a^5bc^2-4a^3b^4c^2+6a^3bc^3=\qquad \boxed{2a^3bc^2\left(a^2-2b^3+3c\right)}$

$b)\quad ax^2-b^2x^2+ay-b^2y=\qquad x^2\left(a-b^2\right)+y\left(a-b^2\right)=\boxed{\left(a-b^2\right)\left(x^2+y\right)}$

$c)\quad 15x^2y-20x^2z=\qquad \boxed{5x^2\left(3y-4z\right)}$

$d)\quad xy^3+8xy^2-6xy=\qquad \boxed{xy\left(y^2+8y-6\right)}$

$e)\quad 6z^2+10yz-2z+2z^2-4y^2z=\qquad \boxed{2z\left(3z+5y-1+z-2y^2\right)}$

$f)\quad 12x^4y^3-6x^5y^2+18x^2y-6y^2x^3=\qquad \boxed{6x^2y\left(2x^2y^2-x^3y+3-xy\right)}$

$g)\quad 3x^2y+6xy^2-9x^2y^3=\qquad \boxed{3xy\left(x+2y-3xy^2\right)}$

$h)\quad \frac{5a}{2}+\frac{3}{5}a-\frac{a}{7}=\qquad a\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)=\boxed{\frac{207}{70}a}$

$i)\quad -ab+\frac{abc}{2}-\frac{1}{3}ab=\qquad ab\left(-1+\frac{c}{2}-\frac{1}{3}\right)=\boxed{ab\left(\frac{c}{2}-\frac{4}{3}\right)}$

$j)\quad 8a+10b-6c=\qquad \boxed{2\left(4a+5b-3c\right)}$

$k)\quad 2ab+7b^3-ba^2=\qquad \boxed{b\left(2a+7b^2-a^2\right)}$

$l)\quad 7\left(x+2\right)-5x\left(x+2\right)-3x^2\left(x+2\right)=\qquad \boxed{\left(x+2\right)\left(7-5x-3x^2\right)}$

Ejercicio 19

Anota las características que observes en el divisor:

- Debe ser de grado 1
- el coeficiente de la x, también llamado coeficiente lineal, siempre es 1
- el término independiente puede ser positivo o negativo

Ejercicio 20

En el ejemplo anterior, ¿de qué grado es el polinomio cociente?, ¿y el grado del resto?

- De grado dos, un grado menor que el grado del polinomio dividendo.
- Siempre será de grado cero, es decir, un número sin indeterminada o variable (sin x).

¿Se cumplirá siempre así? Sí

Ejercicio 21

Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

$a)\quad \left(x^4-5x^3+3x+8\right):\left(x-2\right) \qquad C\left(x\right)=x^3-3x^2-6x-9;\quad R\left(x\right)=10$

$b)\quad \left(x^4+6x^3+7x^2-4\right):\left(x+5\right) \qquad C\left(x\right)=x^3+x^2+2x-10;\quad R\left(x\right)=46$

$c)\quad \left(x^3+5x+25\right):\left(x-1\right) \qquad C\left(x\right)=x^2+x+6;\quad R\left(x\right)=31$

$d)\quad \left(2x^6-6x^5-4x^4+14x^3-11x^2+16x-3\right):\left(x-3\right)$

La división es exacta: $C\left(x\right)=2x^5-4x^3+2x^2-5x+1;\quad R\left(x\right)=0$

$e)\quad \left(x^4+5x^2+3x\right):\left(x+1\right) \qquad C\left(x\right)=x^3-x^2+6x-3;\quad R\left(x\right)=3$

Ejercicio 22

Halla el valor de **m** para que el polinomio $P(x)=x^3+5x^2+mx+4$ sea divisible por (x+2):

Hay que hacer el montaje de Ruffini pero con el coeficiente ***m***. No confundid “divisible” con “algo que se pueda dividir”. El 7 se puede dividir entre 2, sin embargo, no es divisible. Si es divisible, el resto es cero.

Tras aplicar Ruffini se obtiene este resto: $-2m+16$; como debe ser divisible, dicho resto debe ser cero; por tanto, tras resolver la ecuación: $\boxed{m=8}$

Ejercicio 23

Halla el valor de **m** para que la división $\left(x^3+mx^2-5x+6\right):\left(x-3\right)$ sea exacta:
Tras aplicar Ruffini, en la parte del cociente deberíais obtener:

$1 \quad 3+m \quad 4+3m \quad 18+9m$; el último término, que corresponde con el resto, debe ser cero, por tanto: $\boxed{m=-2}$

Ejercicio 24

Si no queremos recurrir a la memoria para utilizar las fórmulas del ***cubo*** de dos monomios, ¿de qué manera sencilla podemos operar?

$$\boxed{(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)}$$

(R) Ejercicio 25

Realiza las siguientes operaciones:

01) $(a+1)^2 = a^2+2a+1$

02) $(2a+3)^2 = 4a^2+12a+9$

03) $(x-2y)^2 = x^2-4xy+4y^2$

04) $\left(3+\sqrt{3}\right)^2 = 9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$

05) $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$

06) $(3x-2)^2 = 9x^2-12x+4$

07) $(3x+1)^2 = 9x^2+6x+1$

08) $(y-3)^2 = y^2-6y+9$

09) $(x-1)^2 = x^2-2x+1$

10) $(2x-2)^2 = 4x^2-8x+4$

11) $(2y+4)^2 = 4y^2+16y+16$

12) $(a+1)(a-1) = a^2-1$

13) $(2a+3)(2a-3) = 4a^2-9$

14) $(x-2y)(x+2y) = x^2-4y^2$

15) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) = 9-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 6$

16) $(4x-3y)(4x+3y) = 16x^2-9y^2$

17) $(2x-1)(2x+1) = 4x^2-1$

18) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2-\frac{1}{4}$

19) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) = x^2-\frac{4}{9}$

20) $(3x-2)(3x+2) = 9x^2-4$

21) $\left(2y^2+1\right)\left(2y^2-1\right) = 4y^4-1$

22) $\left(x^2+2\right)\left(x^2-2\right) = x^4-4$

$23)\ \left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=x^4-\frac{1}{16}$	$24)\ \left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)=\frac{x^2}{4}-y^2$
$25)\ \left(2x^2+5y\right)^2=4x^4+20x^2y+25y^2$	$26)\ \left(2x^2+3\right)\left(2x^2-3\right)=4x^4-9$
$27)\ \left(\sqrt{y}-x\right)^2=y+2x+x^2$	$28)\ \left(x-3y\right)^2=x^2-6xy+9y^2$
$29)\ \left(\frac{1}{4}x^2-2y\right)^2=\frac{x^4}{16}-x^2y+4y^2$	$30)\ \left(a-2b+3c\right)^2=\left[\left(a-2b\right)+3c\right]^2=$
$31)\ \left(a^2x-2y\right)\left(a^2x+2y\right)=a^4x^2-4y^2$	$=\left(a-2b\right)^2+6c\left(a-2b\right)+9c^2=$ $=a^2-4ab+4b^2+6ac-12bc+9c^2$

Atención: no debes fiarte de la posición de los monomios. Esta expresión:

$36+x^2+12x$ también es $\left(x+6\right)^2$

(R) Ejercicio 26

Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, o bien como producto de una suma por una diferencia:

$a)\ x^2+10x+25=\left(x+5\right)^2$	$f)\ 4+4x+x^2=\left(2+x\right)^2$
$b)\ x^2-2x+1=\left(x-1\right)^2$	$g)\ 9x^2-12xy+4y^2=\left(3x-2y\right)^2$
$c)\ 16x^2-1=\left(4x+1\right)\left(4x-1\right)$	$h)\ x^4-\frac{1}{4}=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$
$d)\ 9x^2-25=\left(3x+5\right)\left(3x-5\right)$	$i)\ x^4+x^2+\frac{1}{4}=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2$
$e)\ 4x^2-12x+9=\left(2x-3\right)^2$	$j)\ x^4-2x^3+x^2=x^2\left(x^2-2x+1\right)=$ $=x^2\left(x-1\right)^2;\quad o\ bien\quad =\left(x^2-x\right)^2$