Unidad 4: Álgebra II. Factorización

Ejercicio 27

Factoriza los siguientes polinomios:

$a)\quad x^2+9x+14=(x+2)(x+7)$

$b)\quad x^2-3x=x(x-3)$

$c)\quad x^2-x=x(x-1)$

$d)\quad -x^2-x+2=(x+2)(x-1)$

$e)\quad x^2-81=(x+9)(x-9)$

$f)\quad 3x^2-15x=3x(x-5)=x(3x-15)$

$g)\quad 2x^2+5x-3=(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$h)\quad 2x^2-50=(x+5)(x-5)$

Ejercicio 28

Factoriza los siguientes polinomios:

$a)\quad x^2-2x+1=(x-1)^2=(x-1)(x-1)$

$b)\quad x^2-81=(x+9)(x-9)$

$c)\quad x^2-6x+9=(x-3)^2=(x-3)(x-3)$

$d)\quad 16x^2+8x+1=(4x+1)^2=(4x+1)(4x+1)$

$e)\quad 4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$

Ejercicio resuelto			
Factoriza el siguiente polinomio: x^3+2x^2-x-2			
¿cuál es el divisor?	$\boxed{x-1}$	¿y el dividendo?	$\boxed{x^3+2x^2-x-2}$
¿y el cociente?	$\boxed{x^2+3x+2}$	¿y el resto?	$\boxed{0}$

Ejercicio 29

¿Por qué resolver la ecuación de 2º grado es la mejor opción?

Primero, evitamos tener que probar con distintos números (los divisores del término independiente).

Segundo (y más importante), porque el procedimiento de Ruffini sólo es válido para soluciones enteras. Si el polinomio tuviera soluciones fraccionarias Ruffini no las encontraría; sin embargo, sí las encontraríamos al resolver la ecuación

Ejercicio 30

Factoriza el siguiente polinomio: $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 =$
$= (x-1)(x-2)(x-3)(x+2)$

Ejercicio 31

Factorizar los siguientes polinomios:

$P(x) = x^3 - x^2 - 2x$	$P(x) = x(x+1)(x-2)$
$Q(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$	$Q(x) = x(x-4)(x+2)$
$R(x) = x^3 + 4x^2 - 21x$	$R(x) = x(x-3)(x+7)$
$S(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$	$S(x) = (x-2)^2(x-4)$
$T(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$	$T(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$
$U(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$	$U(x) = (x-2)(x+2)(x+3)$
$V(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$	$V(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x - 1)$
$W(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
$Z(x) = x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 24x - 32$	$Z(x) = (x-2)(x+2)^2(x+4)$

Ejercicio 32

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$a)\quad \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2} =$ $\quad \dfrac{x^2(x-1)}{x^2(x+2)} = \boxed{\dfrac{x-1}{x+2}}$

$b)\quad \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} =$ $\quad \dfrac{(x^2 + x + 1)(x-1)}{x-1} = \boxed{x^2 + x + 1}$

$c)\quad \dfrac{x^3 - x}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8} =$ $\quad \dfrac{x(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \boxed{\dfrac{x(x+1)}{(x+2)(x-4)}}$

$d)\quad \dfrac{15a^4b^4c^2}{18ab^2c^3} =$ $\quad \boxed{\dfrac{5a^3b^2}{6c}}$

$e)\quad \dfrac{20x^4y^2}{30x^2y} =$ $\quad \boxed{\dfrac{2x^2y}{3}}$

$f)$	$\dfrac{ab-a^2}{ax-a^2}=$	$\dfrac{a(b-a)}{a(x-a)}=\boxed{\dfrac{b-a}{x-a}}$
$g)$	$\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=$	$\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\boxed{\dfrac{a+b}{a-b}}$
$h)$	$\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^4+6x^3+4x^2-24x-32}=$	$\dfrac{(x-2)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)^2(x+4)}=\boxed{\dfrac{(x+3)}{(x+2)(x+4)}}$
$i)$	$\dfrac{x^5-xy^2}{x^3-xy}=$	$\dfrac{x(x^4-y^2)}{x(x^2-y)}=\dfrac{x(x^2+y)(x^2-y)}{x(x^2-y)}=\boxed{x^2+y}$
$j)$	$\dfrac{x+1}{x^2-1}=$	$\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\boxed{\dfrac{1}{x-1}}$
$k)$	$\dfrac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}=$	$\dfrac{x(y-2)-3(y-2)}{x(y-2)}=\dfrac{(x-3)(y-2)}{x(y-2)}=\boxed{\dfrac{x-3}{x}}$
$l)$	$\dfrac{x^4-2x^2y+y^2}{x^2y-y^2}=$	$\dfrac{(x^2-y)^2}{y(x^2-y)}=\boxed{\dfrac{x^2-y}{y}}$
$m)$	$\dfrac{x^2-2xy+y^2}{3x^3-3x^2y}=$	$\dfrac{(x-y)^2}{3x^2(x-y)}=\boxed{\dfrac{x-y}{3x^2}}$
$n)$	$\dfrac{9x^2+6xy+y^2}{9x^2-y^2}=$	$\dfrac{(3x+y)^2}{(3x+y)(3x-y)}=\boxed{\dfrac{3x+y}{3x-y}}$
$ñ)$	$\dfrac{24x^3y^2z}{30xy^8z^4}=$	$\boxed{\dfrac{4x^2}{5y^6z^3}}$
$o)$	$\dfrac{18(x^2+2)(x-1)}{6x^3+12x}=$	$\dfrac{18(x^2+2)(x-1)}{6x(x^2+2)}=\boxed{\dfrac{3(x-1)}{x}}$

Actividad para copiar

Reduce a común denominador: $\dfrac{3}{x-1},\quad \dfrac{x}{x+1},\quad \dfrac{x+1}{x^2-1}$

Es conveniente que los alumnos vean el desarrollo que haga el profesor en la pizarra y, **después**, que lo copien en el dossier.

Sólo deberemos fijarnos en los denominadores.

Actividad para copiar (continuación)
A medida que se vaya teniendo más práctica se desarrollarán en los alumnos ciertas capacidades de "ver", por ejemplo, que el tercer denominador incluye a los otros dos.

$x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$, por tanto, el denominador común es $\boxed{x^2-1}$

Las fracciones equivalentes a las anteriores son:

$$\frac{3(x+1)}{x^2-1},\quad \frac{x(x-1)}{x^2-1},\quad \frac{x+1}{x^2-1}$$

Actividad para copiar

Reduce a común denominador: $\dfrac{a}{bc},\quad \dfrac{b}{ac},\quad \dfrac{c}{ab}$

A la vista de los denominadores, el m.c.m. es abc, y las fracciones equivalentes son:

$\dfrac{a^2}{abc},\quad \dfrac{b^2}{abc},\quad \dfrac{c^2}{abc}$. Suma las fracciones obtenidas: $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

Actividad para copiar

Determina si estas dos fracciones son equivalentes: $\dfrac{a^2x^2-b^2}{a^2x^2+2abx+b^2},\quad \dfrac{ax-b}{ax+b}$

1ª forma de hacerlo: factorizando en la primera fracción

En el numerador de la primera fracción hay una diferencia de cuadrados, y el denominador es el desarrollo del cuadrado de la suma de dos monomios:

$\dfrac{a^2x^2-b^2}{a^2x^2+2abx+b^2}=\dfrac{(ax+b)(ax-b)}{(ax+b)^2}=\dfrac{(ax-b)}{(ax+b)}$ que es la segunda fracción.

2ª forma de hacerlo: multiplicando en cruz:

Deberá cumplirse que: $\left(a^2x^2-b^2\right)(ax+b)=\left(a^2x^2+2abx+b^2\right)(ax-b)$

$$a^3x^3+a^2bx^2-ab^2x-b^3=a^3x^3-a^2bx^2+2a^2bx^2-2ab^2x+ab^2x-b^3$$

Reducimos los términos iguales de ambos miembros:

$\underbrace{a^3x^3}_{1}+a^2bx^2-ab^2x\underbrace{-b^3}_{2}=\underbrace{a^3x^3}_{1}-a^2bx^2+2a^2bx^2-2ab^2x+ab^2x\underbrace{-b^3}_{2}$;

$a^2bx^2-ab^2x=-a^2bx^2+2a^2bx^2-2ab^2x+ab^2x$; Se agrupan términos en 2ª parte:

$a^2bx^2-ab^2x=a^2bx^2-ab^2x$; y se observa que, efectivamente, son iguales.

Ejercicio 33

Determina si estas dos fracciones son equivalentes de dos formas:

a) operando sobre ellas: $\dfrac{x^3+x^2}{x^4-x^2}, \quad \dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{x^3+x^2}{x^4-x^2}=\frac{x^2(x+1)}{x^2(x^2-1)}=\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

b) multiplicando "en cruz": $\dfrac{x^3+x^2}{x^4-x^2}, \quad \dfrac{1}{x-1}$

$(x^3+x^2)(x-1)=(x^4-x^2)$; Deben ser iguales:

$x^4-x^3+x^3-x^2=(x^4-x^2)$; $\quad x^4-x^2=(x^4-x^2)$;

Ejercicio 34

Opera y deja el resultado lo más simplificado posible:

$a)\quad \dfrac{x+2y}{x^2-y^2}+\dfrac{2x-5y}{x^2-y^2}= \qquad \dfrac{3x-3y}{x^2-y^2}=\dfrac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\boxed{\dfrac{3}{x+y}}$

$b)\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}-5= \qquad \boxed{\dfrac{-5x^2-2x+1}{x^2+x}}$

$c)\quad \dfrac{x+1}{x^2-2}\cdot\dfrac{x-1}{x^2+2}= \qquad \boxed{\dfrac{x^2-1}{x^4-4}}$

$d)\quad \dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x^2}{x+1}= \qquad \dfrac{x+1+(x-1)x^2}{x^2-1}=\boxed{\dfrac{x^3-x^2+x+1}{x^2-1}}$

$e)\quad \dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}= \qquad \dfrac{3(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3x+6+x-2}{(x-2)(x+2)}=\boxed{\dfrac{4x+4}{(x-2)(x+2)}}$

$f)\quad \dfrac{2x+3}{x-1}\cdot\dfrac{5x^2}{x+1}= \qquad \boxed{\dfrac{10x^3+15x^2}{x^2-1}}$

$g)\quad \dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{y}{y^2-x^2}= \qquad \dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{(-1)y}{(-1)(y^2-x^2)}=\ldots=\dfrac{x-y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{1}{x+y}$

$h)\quad \dfrac{a-b}{c-d}-\dfrac{b-a}{d-c}= \qquad \dfrac{a-b}{c-d}-\dfrac{(-1)(b-a)}{(-1)(d-c)}=\dfrac{a-b}{c-d}-\dfrac{(-b+a)}{(-d+c)}=$

$$=\frac{a-b}{c-d}-\frac{a-b}{c-d}=\frac{a-b-(a-b)}{c-d}=\boxed{0}$$

$$i)\quad \frac{4ax}{2(x+a)}\cdot\frac{x}{3(a+1)}= \qquad \boxed{\frac{2ax^2}{3(ax+x+a^2+a)}}$$

$$j)\quad \frac{x^2-1}{x}:(x-1)= \qquad \frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\boxed{\frac{x+1}{x}}$$

$$k)\quad \frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}= \qquad \frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}=\boxed{\frac{a+b}{ab}}$$

$$l)\quad \frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}=\frac{2x(x+1)+(3x+1)(x+1)-(1-x)}{(x+1)(x-1)}=\boxed{\frac{5x^2+7x}{(x+1)(x-1)}}$$

$$m)\quad \frac{3}{2x-4}+\frac{1}{x-2}-\frac{x+10}{2x^2-8}=\frac{3(x+2)+2(x+2)-(x+10)}{2(x+2)(x-2)}=\boxed{\frac{2x}{(x+2)(x-2)}}$$

$$n)\quad \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)= \qquad \frac{(1-x+x^2)(x^4+x^3)}{x^3}=\frac{x^6+x^3}{x^3}=\boxed{x^3+1}$$

$$ñ)\quad \left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)= \qquad \left(\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}\right)\left(\frac{3+x^2-4x^2}{4x}\right)=$$

$$\left(\frac{4x}{(1-x)(1+x)}\right)\left(\frac{3-3x^2}{4x}\right)=\frac{3(1-x^2)}{(1-x)(1+x)}=\boxed{3}$$

$$o)\quad \left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)= \quad \left(\frac{x^2-x+x}{x-1}\right):\left(\frac{x^2-x-x}{x-1}\right)=\left(\frac{x^2}{x-1}\right):\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{x^2(x-1)}{(x^2-2x)(x-1)}=\frac{x^2}{x^2-2x}=\boxed{\frac{x}{x-2}}$$

$$p)\quad \frac{1+b}{a^2b}+\frac{1-b}{a^2b^2}= \qquad \frac{b(1+b)+(1-b)}{a^2b^2}=\frac{b+b^2+1-b}{a^2b^2}=\boxed{\frac{b^2+1}{a^2b^2}}$$

$$q)\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}= \qquad \frac{x(x+1)-x^2-(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{x^2+x-x^2-x-1}{x^2(x+1)}=\boxed{\frac{-1}{x^2(x+1)}}$$

$$r)\quad \frac{x^2+2x+1}{x}:\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x^2+2x+1)x^2}{x(x^2-1)}=\frac{(x+1)^2x}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x+1)x}{x-1}=\boxed{\frac{x^2+x}{x-1}}$$

$$s)\quad \frac{x^2-9}{x^3+x}\cdot\frac{x}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+3x}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)x^2(x+3)}{x(x^2+1)(x+3)^2(x-3)}=\boxed{\frac{x}{x^2+1}}$$