Unidad 6: Sistemas de ecuaciones (Soluciones)

Ejercicio 1

Cuando se plantea el sistema, en la imagen de la izquierda ya se ha asignado al valor del refresco, la incógnita x, e y, al valor de un trozo de pizza. El sistema a resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=11 \\ 3x+2y=12 \end{array}\right\}$$

Por SUSTITUCIÓN, despejamos x de la primero ecuación: $x=11-3y$, y sustituimos este valor en la segunda ecuación: $3(11-3y)+2y=12$; operamos:

$33-9y+2y=12$; $33-12=7y$; ; $y=\frac{21}{7}=3$; Cada trozo de pizza cuesta 3€. Nos falta el valor de la x; Podemos utilizar, por ejemplo, la expresión donde se despejaba x de la primera ecuación: $x=11-3y$, entonces: $x=11-3\cdot 3$; x=2; el refresco cuesta 2€.

Ejercicio 2 (Sustitución)

$\left.\begin{array}{r} x+y=9 \\ 20x-3y=-4 \end{array}\right\}$ Se despeja la incógnita más sencilla; elegimos la x de la primera ecuación, y sustituimos su valor en la segunda ecuación:

$x=9-y$; $20(9-y)-3y=-4$; $180-20y-3y=-4$; $184=23y$; $y=8$; sustituyendo en la primera ecuación: $x=1$; solución: $x=1$; $y=8$

$\left.\begin{array}{r} 5x-y=23 \\ -9x+5y=13 \end{array}\right\}$ Solución: $x=8$; $y=17$

$\left.\begin{array}{r} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ Solución: $x=1$; $y=1$

Ejercicio 3 (Igualación)

$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x=5-y \\ x=1+y \end{array}\right\}$ y se igualan los resultados: $5-y=1+y$. Se despeja la única incógnita que queda: $4=2y$, por tanto: $y=2$; y sustituyendo este valor de y en en cualquier ecuación, obtendremos el valor de la incógnita que falta: $x=3$.

$\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ Solución: $x=3$; $y=1$

$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=19 \\ 5x-2y=0 \end{array}\right\}$ Solución: $x=2$; $y=5$

Ejercicio 4 (Reducción)

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ Observamos que la y de la primera ecuación es positiva, y la y de la segunda ecuación es negativa, por lo que se convierte en la mejor candidata para eliminarla, y así "reducir" el número de incógnitas. Multiplicamos toda la segunda ecuación por 3:

$\left.\begin{array}{r} x+3y=4 \\ 6x-3y=3 \end{array}\right\}$ Al sumar ambas ecuaciones, "las y desaparecen", quedando: $7x=7$, por tanto, $x=1$; sustituyendo este valor de x en cualquier ecuación, obtendremos el valor de la otra incógnita: $y=1$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=33 \end{array}\right\}$ Solución: $x=6\,;\,y=7$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x=-6+4y \\ x+2y=8 \end{array}\right\}$ Primero hay que ordenar la primera ecuación. Solución: $x=2\,;\,y=3$

Ejercicio 5 (Método más conveniente)

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=3 \\ x+2y=12 \end{array}\right\}$ Se multiplica la ec. de arriba por 4, que es el m.c.m de los denominadores:

$\left.\begin{array}{r} \frac{\cancel{2}\cdot 2x}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{4}y}{\cancel{4}}=4\cdot 3 \\ x+2y=12 \end{array}\right\}$ es decir, $\left.\begin{array}{r} 2x+y=12 \\ x+2y=12 \end{array}\right\}$ y ahora podemos usar cualquier método.

Solución: $x=4\,;\,y=4$

b) $\left.\begin{array}{r} \frac{3x}{2}-y=6 \\ x+5y=38 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la ec. de arriba por 2: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=12 \\ x+5y=38 \end{array}\right\}$, y se resuelve por cualquier método: Solución: $x=8\,;\,y=6$

c) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{4}{3} \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$ Igual que las anteriores, multiplicamos la primera ecuación por 6:

$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$ Solución: $x=1\,;\,y=2$

6

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=39 \\ x-y=11 \end{array}\right\}$ Solución: $x=25;\ \ y=14$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=54 \\ x=2y \end{array}\right\}$ Solución: $x=36;\ \ y=18$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+4y=10 \\ y+4x=9 \end{array}\right\}$ Solución: $x=2;\ \ y=1$

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=13 \\ 3x-y=4 \end{array}\right\}$ Solución: $x=3;\ \ y=5$

7.

a) $\left.\begin{array}{l} \text{x=habitaciones dobles} \\ \text{y=habitaciones sencillas} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ 2x+y=87 \end{array}\right\}$ Solución: 37 dobles y 13 sencillas

b) $\left.\begin{array}{l} \text{x=pollos} \\ \text{y=conejos} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=22 \\ 2x+4y=64 \end{array}\right\}$ Solución: 12 pollos y 10 conejos

c) $\left.\begin{array}{l} \text{x=libros a 3€} \\ \text{y=libros a 4€} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=84 \\ 3x+4y=289 \end{array}\right\}$ Solución: 47 libros a 3€ y 37 libros a 4€

d) $\left.\begin{array}{l} \text{x=pizza margarita} \\ \text{y=pizza 4 quesos} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=79 \\ 3x+5y=319 \end{array}\right\}$ Solución: 38 margaritas y 41 de cuatro quesos

e) $\left.\begin{array}{l} \text{x=botellas de 2 litros} \\ \text{y=botellas de 6 litros} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=460 \\ 2x+6y=1360 \end{array}\right\}$ Solución: 350 botellas de 2 litros y 110 de 6 litros

f) $\left.\begin{array}{l} \text{x=botellas de 2 litros} \\ \text{y=botellas de 5 litros} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 2x+5y=300 \end{array}\right\}$ Solución: 100 botellas de 2 litros y 20 de 5 litros

g) $\left.\begin{array}{l} \text{x=edad abuelo} \\ \text{y=edad hermano} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=56 \\ x=y+50 \end{array}\right\}$ Solución: Mi abuelo tiene 53 años y mi hermano 3 años

Ejercicio 8

a) Un rectángulo tiene, en general, dos lados iguales largos y dos iguales más cortos. Sea x el lado largo e y el lado corto (ancho).

Como el perímetro de una figura es la suma de los lados, se cumplirá que x + y+ x + y = 392; es decir:

$2\mathrm{x}+2\mathrm{y}=392\,m\,(es\,la\ primera\,ecuación)$

Por otro lado, como el rectángulo mide 52 m más largo que ancho, se cumplirá que, para tener un lado largo se necesiten el corto más 52 m, es decir:

$x=y+52\,m\,(es\,la\,segunda\,ecuación)$

Resolvemos el sistema

$\left.\begin{aligned}2\mathrm{x}+2\mathrm{y}=392\\ x=y+52\end{aligned}\right\}$ por sustitución, ya que tenemos la x despejada en la segunda ec.

Solución: $x\,(que\,es\,el\,lado\,largo)=124\,m\,;\ y\,(que\,es\,el\,lado\,corto)=72\,m$

b) Muy parecido al anterior. Piden el área de un rectángulo, por tanto necesitamos saber la base (sea x la incógnita que lo simbolice) y la altura (sea y) y luego multiplicarlas. Por un lado, dan el perímetro como dato:

$2\mathrm{x}+2\mathrm{y}=16\,cm\,(es\,la\ primera\,ecuación)$

Por otro lado, si la base es el triple que su altura (imagínate un rectángulo mucho más ancho que alto o largo), se necesitarán 3 veces la altura para poder igualar a su anchura, es decir:

$x=3\ y\,(es\,la\,segunda\,ecuación)$. De nuevo se podría resolver de forma óptima por sustitución.

El sistema es: $\left.\begin{aligned}2\mathrm{x}+2\mathrm{y}=16\\ x=3\mathrm{y}\end{aligned}\right\}$ Solución de las incógnitas: $x=6\mathrm{cm}\,,\ y=2\mathrm{cm}$

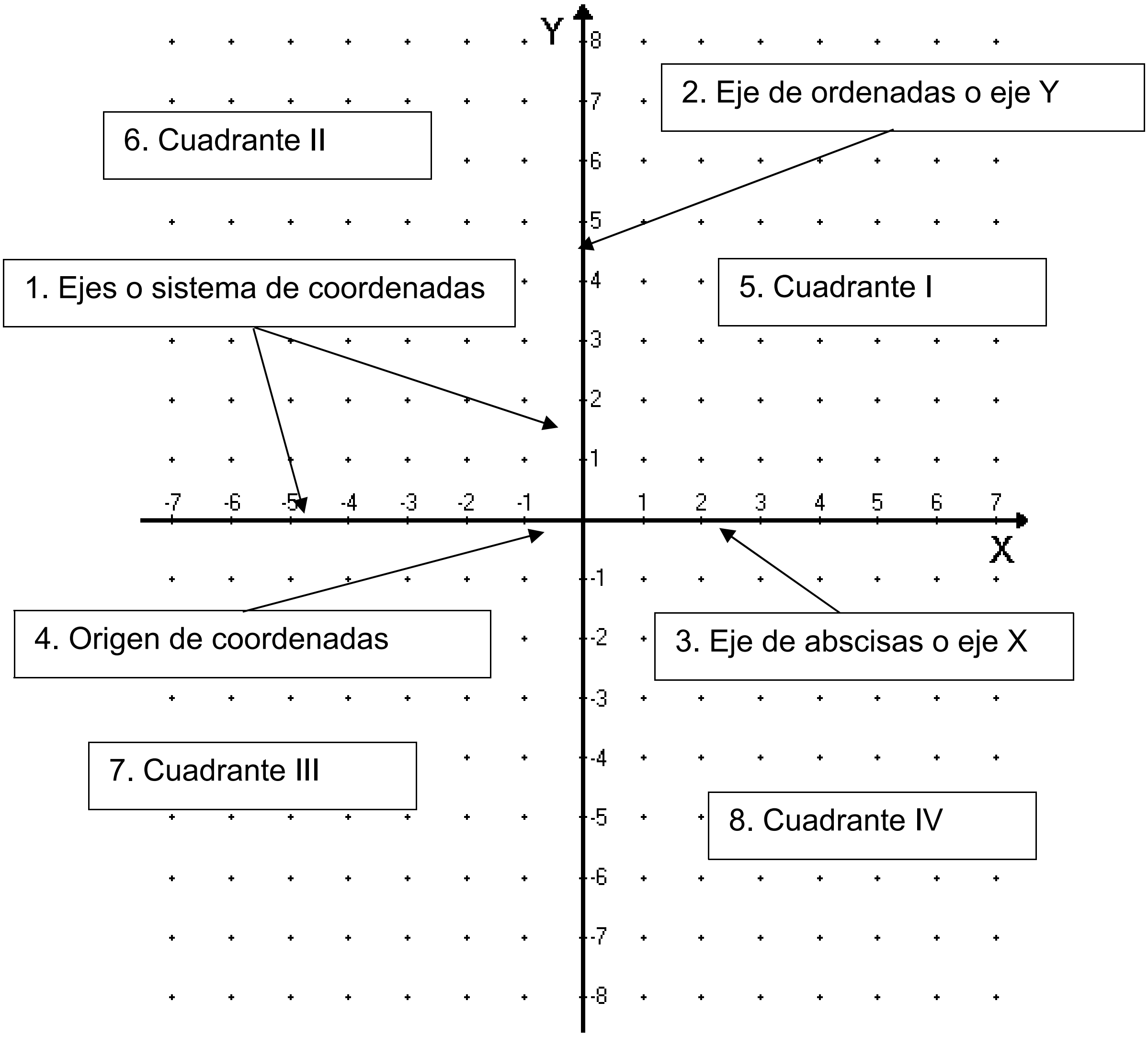
Solución del problema: El área del rectángulo es: $Área=6\mathrm{cm}\,x\,2\mathrm{cm}=12\,cm^2$

c) Los lados paralelos de un rectángulo son iguales:

c.1) $\left.\begin{aligned}3\mathrm{x}+y=17\\ 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}=4\end{aligned}\right\}$ Soluciones: $x=5, y=2$

c.2) $\left.\begin{aligned}x+6=2\\ x=y-2\end{aligned}\right\}$ Soluciones: $x=-4, y=-2$ Este ultimo ejercicio tiene soluciones algo absurdas, ya que tango x como y simboliza tamaños (distancias), y estos nunca pueden ser negativos.

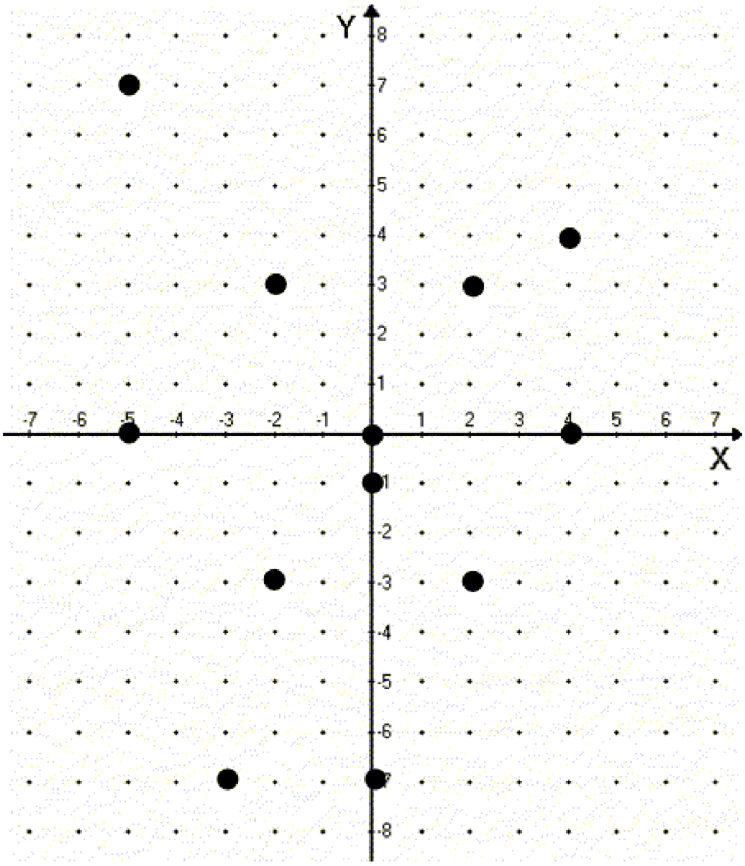
Elementos para el sistema gráfico



Ejercicio 9

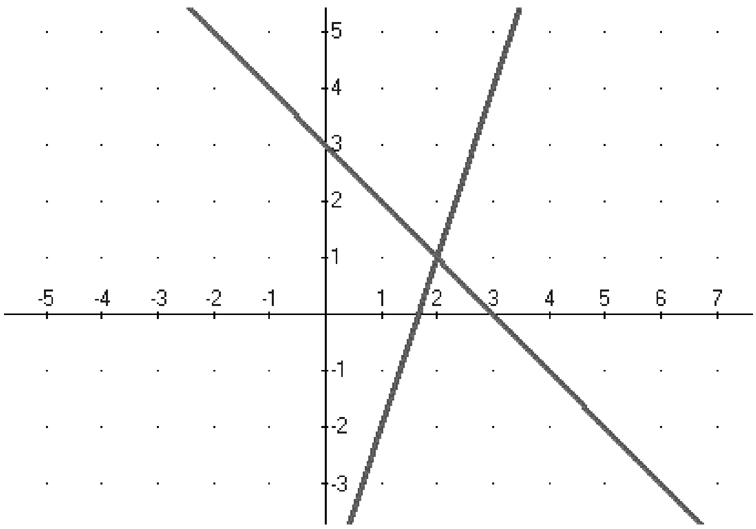
Porque, en general, no tienen sentido físico las magnitudes negativas: tiempo, distancias, litros por m^2, precios, peso, personas... son cantidades casi siempre positivas, y, por tanto, se ubican en el cuadrante I.

Ejercicio 10



Ejercicio 11

$$\begin{rcases} 3x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{rcases}$$



Solución:

$$\begin{rcases} x = 2 \\ y = 1 \end{rcases}$$

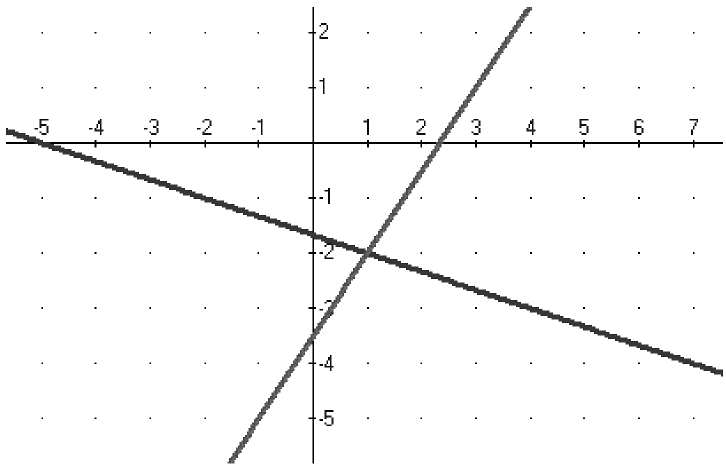
Ejercicio 12

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=7 \\ x+3y=-5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} valores\ x=-1,1,3,5 \\ valores\ x=-5,-2,1,4 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}\right\}$$

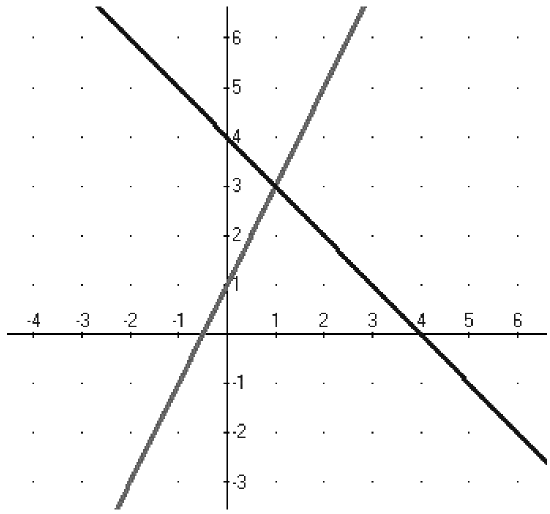


Ejercicio 13

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y=1 \\ y=4-x \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right\}$$

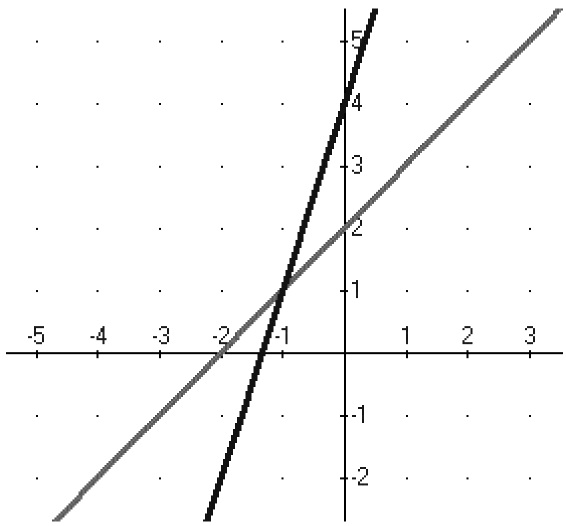


Ejercicio 14

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-2 \\ -3x+y=4 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \end{array}\right\}$$

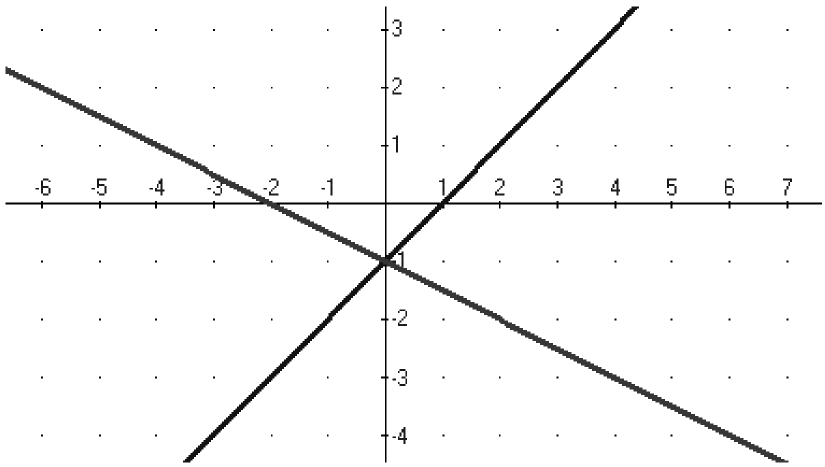


Ejercicio 15

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=-2 \\ x-y&=1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x&=0 \\ y&=-1 \end{aligned}\right\}$$



Ejercicio 16

Porque no tiene sentido que x + y valga dos valores distintos al mismo tiempo. Las ecuaciones dan información contradictoria.

Ejercicio 17

Dos líneas paralelas. No se cortan $\Leftrightarrow$ no tiene solución.

Ejercicio 18

La segunda ecuación es el doble que la primera; no son, por tanto, dos ecuaciones, sino una ecuación con dos incógnitas

Ejercicio 19

Dos líneas superpuestas, coincidentes, ya que se trata de la misma ecuación.

Ejercicio 20

Los coeficientes deben encajar en este esquema: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ siendo a y a' los coeficientes de las x, y siendo b y b' los coeficientes de la y.

La división (cociente o razón) entre los coeficientes de las x debe ser distinta de la división (cociente o razón) de los coeficientes de la y.

Debe encajar en este esquema: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

Debe encajar en este esquema: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Ejercicio 21

Determina, sin resolver, el tipo y número de soluciones de estos sistemas:			
$a)\ \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$	SCD	$b)\ \left.\begin{array}{r} 3x+8y=9 \\ 3x+8y=10 \end{array}\right\}$	SI
$c)\ \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2y=10-2x \end{array}\right\}$	SCI	$d)\ \left.\begin{array}{r} x-3y=2 \\ 2x-6y=3 \end{array}\right\}$	SI
$e)\ \left.\begin{array}{r} 3x-2y=1 \\ 5x=6-y \end{array}\right\}$	SCD	$f)\ \left.\begin{array}{r} x-11=3y \\ 3x-9y=33 \end{array}\right\}$	SCI

Ejercicio 22

$a)\ \ x=3;\quad y=2$	$e)\ \ x=1;\quad y=1$

Ejercicio 23

$a)$ Si a ≠ 6 el sistema es <u>SI (sistema sin solución)</u>

$b)$ Si a = 9 el sistema es un SCI (la segunda ecuación triple que la primera)
Si a ≠ 9 el sistema es SCD (sistema con solución única);
Se llega a $y(-9+a)=0$, y como a ≠ 9 resulta que $y=0$; $x=7$

$c)$ Si a = 5 el sistema es un SI (sin solución)
Si a ≠ 5 el sistema es SCD (sistema con solución única): $\left(\dfrac{a-10}{3a-15}, \dfrac{-1}{a-5}\right)$

Ejercicio 24

a) el sistema es incompatible: $m=-8; n\neq -14$
b) es compatible indeterminado: $m=-8; n=-14$
c) es compatible: $m\neq -8$

Atención: Los gráficos que verás en muchas de las soluciones de los sistemas no lineales son sólo orientativos. Deben servirte para una comprobación visual de las soluciones. En ningún caso se pedirá en este curso la resolución gráfica de un sistema no lineal.

Ejercicio 25

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ xy=16 \end{array}\right\}$

Despejamos la x de la 1ª ecuación y la sustituimos en la 2ª ec.

$\left.\begin{array}{l} x=6+y \\ (6+y)y=16 \end{array}\right\}$ Se resuelve la ecuación de 2º grado, obteniéndose, así, las soluciones de y. $6y+y^2=16; \quad y^2+6y-16=0$

Las soluciones del sistema son: $\begin{array}{l} y_1=-8, \quad x_1=-2 \\ y_2=2, \quad x_2=8 \end{array}$

Ejercicio 26

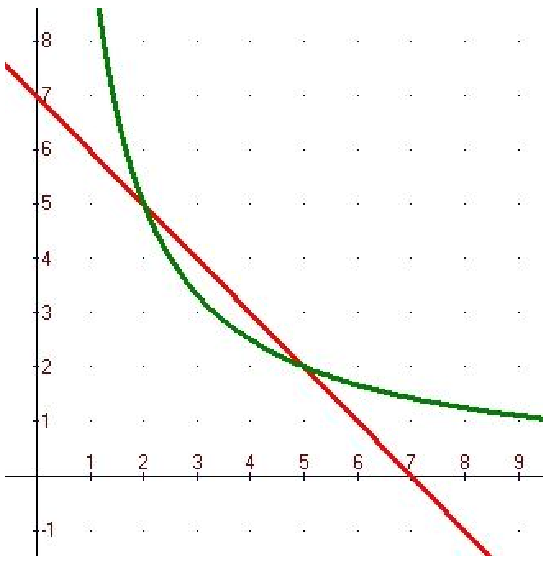
Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$

Despejamos la x de la 1ª ecuación y la sustituimos en la 2ª ec.

$\left.\begin{array}{l} x=7-y \\ (7-y)y=10 \end{array}\right\}$ Se resuelve la ecuación de 2º grado, obteniéndose, así, las soluciones de y.

$7y-y^2=10; \quad y^2-7y+10=0$

Las soluciones del sistema son: $\begin{array}{l} y_1=2, \quad x_1=5 \\ y_2=5, \quad x_2=2 \end{array}$



Ejercicio 27

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{r} xy=-6 \\ 2x+y=4 \end{array}\right\}$

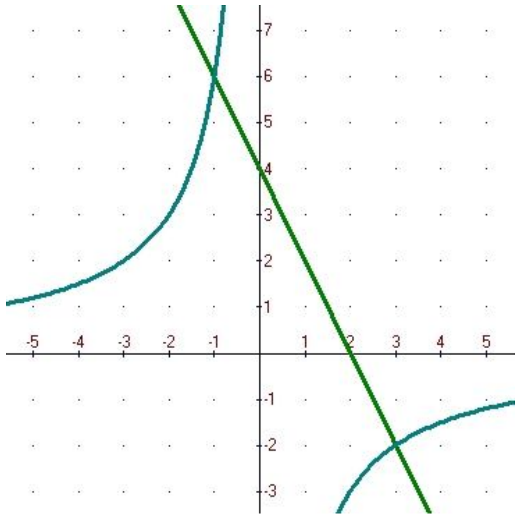
Despejamos la y de la 2ª ecuación y la sustituimos en la 1ª ec.

$$\left.\begin{array}{l} x(4-2x)=-6 \\ y=4-2x \end{array}\right\}$$ Se resuelve la ecuación de 2º grado, obteniéndose, así, la solución de x.

$4x-2x^2=-6;\quad 2x^2-4x-6=0$; observamos que todos los coeficientes son pares, así que optamos por dividir toda la ecuación entre 2:

$$x^2-2x-3=0$$

Las soluciones son: $\begin{array}{l} x_1=-1,\quad y_1=6 \\ x_2=3,\quad y_2=-2 \end{array}$

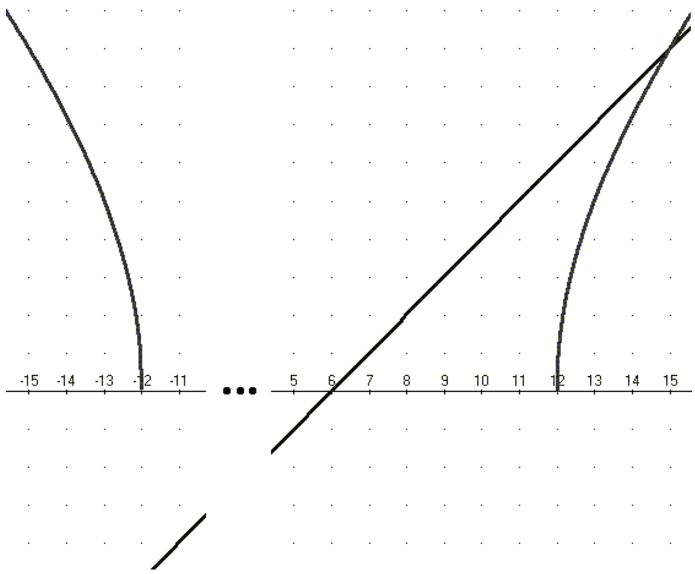


Ejercicio 28

$$\left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ x^2-y^2=144 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x=15 \\ y=9 \end{array}\right\}$$

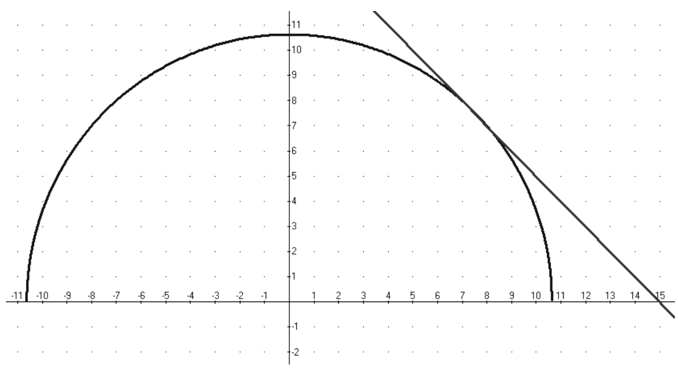


Ejercicio 29

$$\left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ x^2+y^2=113 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=8;\quad y_1=7 \\ x_2=7;\quad y_2=8 \end{array}\right\}$$



Ejercicio 30

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{r} x-2y=5 \\ x^2+y^2=10 \end{array}\right\}$

Despejamos la x de la 1ª ecuación y la sustituimos en la 2ª ec.

$$x=5+2y;$$
$$(5+2y)^2+y^2=10;$$

Se desarrolla la identidad notable y se opera. Se resuelve la ec de 2º grado que resulta, pero antes se divide cada miembro entre 5 para simplificar la ecuación.

$$25+20y+4y^2+y^2=10; \quad 5y^2+20y+15=0; \quad y^2+4y+3=0$$

Las soluciones son: $\begin{array}{l} y_1=-3, \quad x_1=-1 \\ y_2=-1, \quad x_2=3 \end{array}$

Ejercicio 31

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{r} xy=14 \\ x^2+y^2=53 \end{array}\right\}$

Se puede despejar la “y” de la 1ª ec. y sustituir en la 2ª.

$$x^2+\frac{14^2}{x^2}=53$$

Ec. bicuadrada:

$$x^4-53x^2+196=0$$

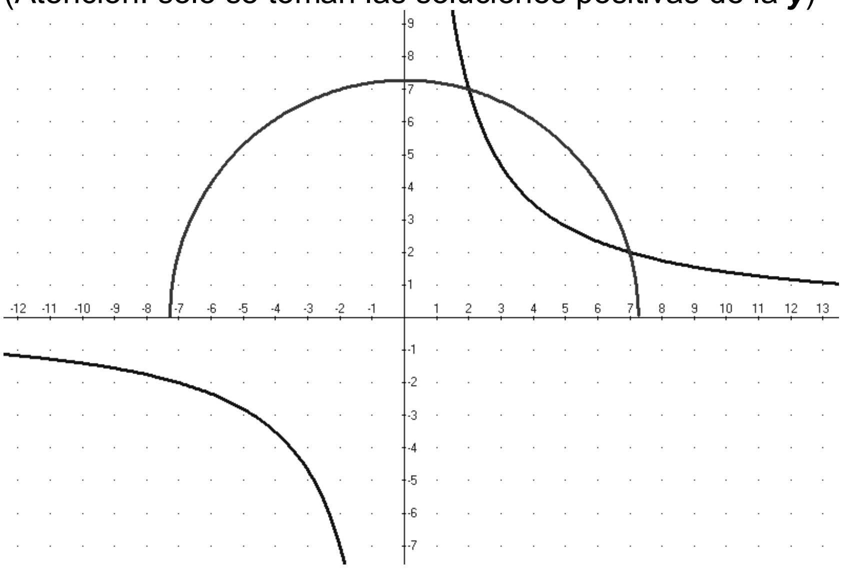
Valores de z:

$$z_1=49; \quad z_2=4$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=2;\ y_1=7 \\ x_2=-2;\ y_2=-7 \\ x_3=7;\ y_3=2 \\ x_4=-7;\ y_4=-2 \end{array}\right\}$$

(Atención: sólo se toman las soluciones positivas de la ***y***)



Ejercicio 32

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{x}+5\\ \dfrac{y}{4}=\dfrac{2}{x}\end{array}\right\}$

Se multiplica la 1ª ec. por x:

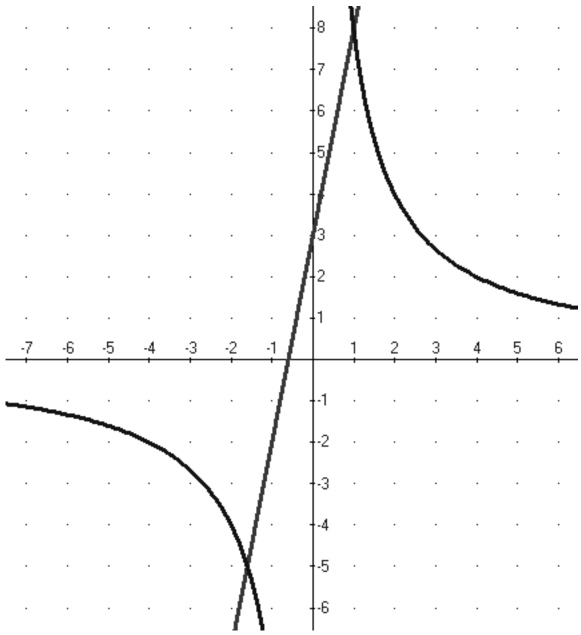
$$\left.\begin{array}{l}y=3+5x\\ xy=8\end{array}\right\}$$

Se sustituye la "y" en la 2ª ec:

$$5x^2+3x-8=0$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=1;\quad y_1=8\\ x_2=\dfrac{-8}{5};\quad y_2=-5\end{array}\right\}$$



Ejercicio 33

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ xy=48\end{array}\right\}$

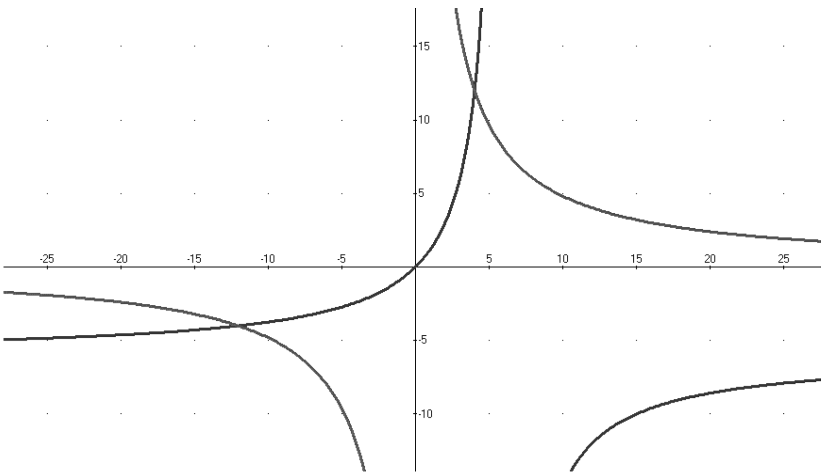
Se multiplica la 1ª ec. 6xy:

$$\left.\begin{array}{r}6y-6x=xy\\ xy=48\end{array}\right\}$$ Igualación:

$$y^2-8y-48=0$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=4;\quad y_1=12\\ x_2=-12;\quad y_2=-4\end{array}\right\}$$



Ejercicio 34

Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{aligned} x^2+2xy+y^2&=49 \\ xy&=12 \end{aligned}\right\}$

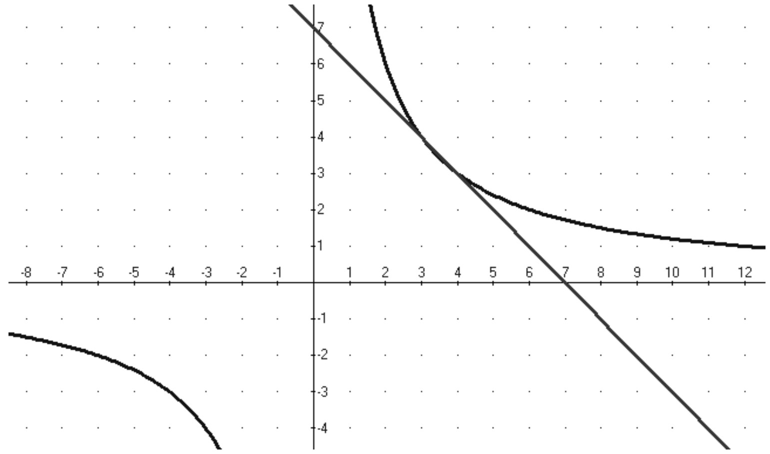
$$\left.\begin{aligned} (x+y)^2&=7^2 \\ xy&=12 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=7 \\ xy&=12 \end{aligned}\right\}$$

$y^2-7y+12=0$;

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=4; \quad y_1=3 \\ x_2&=3; \quad y_2=4 \end{aligned}\right\}$$



Ejercicio 35

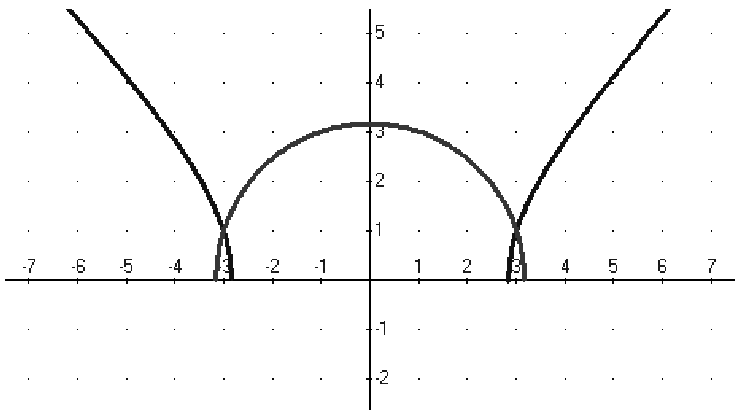
Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=10 \\ x^2-y^2&=8 \end{aligned}\right\}$ (Ayuda: Calcula x^2 por reducción)

$x=\pm 3$

(La ***y*** no puede tener distintos valores para una misma ***x*,** no sería función)

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=3; \quad y_1=1 \\ x_2&=-3; \quad y_2=1 \end{aligned}\right\}$$



Ejercicio 36

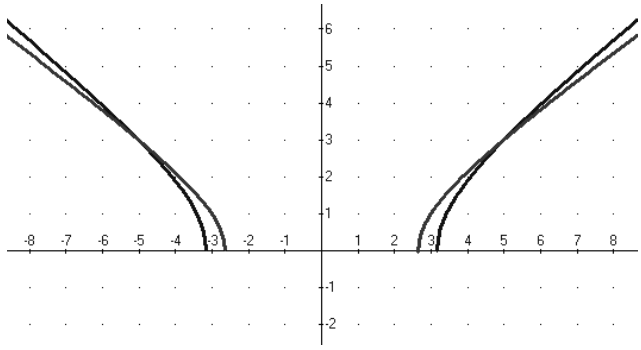
Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{aligned} 3x^2-5y^2&=30 \\ x^2-2y^2&=7 \end{aligned}\right\}$ (Ayuda: Reducción)

$y=\pm 3$

(La ***y*** no puede tener distintos valores para una misma ***x***)

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=5; \quad y_1=3 \\ x_2&=-5; \quad y_2=3 \end{aligned}\right\}$$



Ejercicio 37

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y+3z&=6 \\ 4x-3y+2z&=9 \\ 3x+5y-6z&=-8 \end{aligned}\right\}$$ Solución: $\boxed{x=1; \quad y=-1; \quad z=1}$

Ejercicio 38

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=8 \\ 3x+5y-2z&=7 \\ 4x-y+7z&=23 \end{aligned}\right\}$$ Solución: $\boxed{x=1; \quad y=2; \quad z=3}$

Ejercicio 39

$$\left.\begin{aligned} 4x-5y+2z&=-7 \\ 7x+2y-4z&=5 \\ 5x-4y+3z&=-1 \end{aligned}\right\}$$ Solución: $\boxed{x=1; \quad y=3; \quad z=2}$

Ejercicio 40

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ 2x+3y+5z&=2 \\ x-5y+8z&=26 \end{aligned}\right\}$$ Solución: $\boxed{x=3; \quad y=-3; \quad z=1}$

Ejercicio 41

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y-2z&=2 \\ x+5y+3z&=5 \\ 2x+y-z&=11 \end{aligned}\right\}$$ Solución: $\boxed{x=2; \quad y=3; \quad z=-4}$

Ejercicio 42

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 2x+3y+5z&=12 \\ x-5y+6z&=23 \end{aligned}\right\}$$ Solución: $\boxed{x=0; \quad y=-1; \quad z=3}$