Ejercicios de repaso de

Álgebra

Sistemas de ecuaciones

Inecuaciones

1. Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3 (x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -9 & 24 & -20 \\
2 & & 2 & -14 & 20 \\
\hline
 & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -10 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x-2)^2 (x-5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\
1 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & 2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -2 & -8 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & 4 & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$

no tiene solución

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x-1)(x+1)(x-4)(x^2+x+2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\
-1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\
\hline
 & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\
1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \rightarrow$ no tiene solución

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2 (x+1)(x-1)(x^2+1)$

2. a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +4x^3 & +8x^2 & +7x & +4 & x^2 + x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 + 3x + 4 \\
\cline{1-5}
 & 3x^3 & +7x^2 & +7x & +4 & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & -3x & & \\
\cline{2-5}
 & & 4x^2 & +4x & +4 & \\
 & & -4x^2 & -4x & -4 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución). Por tanto:

$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$

2. **Efectúa:** $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)\,(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)\,(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)\,(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

3. **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$ **b)** $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}=\frac{(x^2-2x+3)\,(2x+3)}{(x-2)\,(x+5)}=$$

$$=\frac{2x^3+3x^2-4x^2-6x+6x+9}{x^2+5x-2x-10}=\frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$$

b) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5}=\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{x+5}{2x+3}=\frac{(x^2-2x+3)\,(x+5)}{(x-2)\,(2x+3)}=$$

$$=\frac{x^3-2x^2+3x+5x^2-10x+15}{2x^2+3x-4x-6}=\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$$

4. **Calcula:**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$ **b)** $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $$\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{x+2}{x}:\frac{(x-1)x}{3(2x+1)}=\frac{x+2}{x}\cdot\frac{3(2x+1)}{(x-1)x}=$$

$$=\frac{3(2x+1)\,(x+2)}{x^2(x-1)}=\frac{3(2x^2+4x+x+2)}{x^3-x^2}=$$

$$=\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2}$$

b) $$\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4}=\frac{(x^4-x^2)\,(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4}=\frac{x^8-x^4}{x^6+x^4}=\frac{x^4(x^4-1)}{x^4(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)\,(x^2-1)}{x^2+1}=x^2-1$$

1. **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 12 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 8x^2 - 9 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \;\to\; x = \pm 2 \\ -3 \;\to\; \text{(no vale)} \end{cases}$ 2 y –2

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \;\to\; x = \pm 3 \\ -1 \;\to\; \text{(no vale)} \end{cases}$ 3 y –3

2. **Resuelve:**

a) $\boldsymbol{x^4 + 10x^2 + 9 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 2 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \;\to\; \text{(no vale)} \\ -9 \;\to\; \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x^2 = -1 \;\to\; \text{No vale} \\ x^2 = 2 \;\to\; x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

Página 76

3. **Resuelve:**

a) $\boldsymbol{-\sqrt{2x - 3} + 1 = x}$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} = 4}$ **c)** $\boldsymbol{2 + \sqrt{x} = x}$

d) $\boldsymbol{2 - \sqrt{x} = x}$ **e)** $\boldsymbol{\sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}}$

a) $1 - x = \sqrt{2x - 3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3;\; x^2 - 4x + 4 = 0;\; x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x + 7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x + 7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x + 7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0;\; x = \dfrac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \;\to\; \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2;\ \ x = x^2 + 4 - 4x;\ \ 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \ \rightarrow \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x};\ \ 4 + x^2 - 4x = x;\ \ x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \begin{cases} 4 \ \rightarrow \ \text{(no vale)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8 - 2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8 - 2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0{,}08 \ \rightarrow \ \text{no vale} \end{cases}$$

Así, $x = 2$.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$ **b)** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30$

$$x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$$

$x_1 = 5{,}489;\ \ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ \ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = \dfrac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ \ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

6. **Resuelve:**

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$ **b)** $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{26}{35}$

a) $x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

b) $10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2+5x+6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -4$

c) $35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ \ x_2 = \dfrac{-8}{13}$

7. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$

b) $3^{4-x^2} = \dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

d) $7^{x+2} = 5\,764\,801$

a) $2^{3x} = 2^{-3x-2};\ \ 3x = -3x - 2;\ \ 6x = -2;\ \ x = \dfrac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2} = 3^{-2};\ \ 4 - x^2 = -2;\ \ x^2 = 6;\ \ x = \pm\sqrt{6}$

$x_1 = \sqrt{6};\ \ x_2 = -\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186;\ \ 2^{2x-2-x-2} = 186;\ \ 2^{x-4} = 186$

$log\ 2^{x-4} = log\ 186;\ \ (x-4)\ log\ 2 = log\ 186$

$x = 4 + \dfrac{log\ 186}{log\ 2} = 11{,}54$

d) $7^{x+2} = 7^8;\ \ x = 6$

8. Resuelve:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $2log\ x - log(x+6) = 3log\ 2$

d) $4\,log_2(x^2+1) = log_2\ 625$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30$

$3^x(10) = 30;\ \ 3^x = 3;\ \ x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \dfrac{5^x}{5} = \dfrac{31}{5}$

$5^x \cdot \dfrac{31}{5} = \dfrac{31}{5};\ \ x = 0$

c) $log\ \dfrac{x^2}{x+6} = log\ 8$

$x^2 = 8x + 48;\ \ x^2 - 8x - 48 = 0;\ \ x = \dfrac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4\ \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 12$

d) $log_2(x^2+1)^4 = log_2\ 5^4;\ \ x^2 + 1 = 5;\ \ x^2 = 4;\ \ x = \pm 2$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = -2$

SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{array}\right\}$

$x^2 - 9 = 2x - 1;\ \ x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$x_1 = 4;\ \ y_1 = 7$

$x_2 = -2;\ \ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

$y = 5 - x$

$x(5 - x) = 6;\ \ 5x - x^2 = 6;\ \ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ \ y_1 = 3$

$x_2 = 3;\ \ y_2 = 2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y + 1} - \sqrt{y + 1} = 2;\ \ \sqrt{3y + 1} = 2 + \sqrt{y + 1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y + 1};\ \ 2y - 4 = 4\sqrt{y + 1};\ \ y - 2 = 2\sqrt{y + 1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ \ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \ \rightarrow\ x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ \ y = 8$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + x\,y + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ \ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ \ x^2 - x - 20 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \ \rightarrow\ y = -4 \\ -4 \ \rightarrow\ y = 5 \end{cases}$$

$x_1 = -4;\ \ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ \ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \;\rightarrow\; x = -7/2 \\ 1 \;\rightarrow\; x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 3;\; y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\; y_2 = \dfrac{-9}{4}$

3. **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}$ 1.ª; 2.ª + 1.ª; 3.ª + 1.ª $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array}\right\}$ 1.ª; 2.ª; 3.ª + 2.ª $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array}\right\}$ 1.ª; 2.ª; 3.ª + 1.ª $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$

4. **Resuelve:**

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\}$ 1.ª + 4 · 2.ª; 2.ª; 3.ª – 3 · 2.ª $\left.\begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array}\right\}$ 2 · 1.ª + 3.ª; 2.ª; 3.ª : 2

$\left.\begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$$

5. Intenta resolver por el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = -2} \\ \boldsymbol{x - 2y - z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = -2} \\ \boldsymbol{x - 2y - z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y = 1} \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = 8} \\ \boldsymbol{x + y - z = 2} \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = 8} \\ \boldsymbol{x + y - z = 1} \end{array}\right.$

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right.$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

$(2.^a) \rightarrow y = 2x - 1$

$(1.^a) \rightarrow z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\left\{\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{array}\right.$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$ Para $x = -2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x \quad\; + \; z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - \; z = 2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3.^a \\ 3.^a \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x \quad\; + \; z = 3 \\ 3x \quad + 3z = 10 \\ x + y - \; z = 2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} x \quad\; + \; z = 3 \\ 0x \quad + 0z = 1 \\ x + y - \; z = 2 \end{array}\right.$ La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1.
Por tanto, el sistema no tiene solución.

d) $\left\{\begin{array}{l} x \quad\; + \; z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - \; z = 1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3.^a \\ 3.^a \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x + \quad\; z = 3 \\ 3x + \quad 3z = 9 \\ x + y - \; z = 1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} x + \quad\; z = 3 \\ 0x + \quad 0z = 0 \\ x + y - \; z = 1 \end{array}\right.$ La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$$\left\{\begin{array}{l} x + \quad z = 3 \;\rightarrow\; x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \;\rightarrow\; y = 1 - x + z = 1 - (3 - z) + z = -2 + 2z \end{array}\right.$$

Soluciones: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{array}\right.$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \;\rightarrow\; x = 3,\; y = -2$

Para $z = 4 \;\rightarrow\; x = -1,\; y = 6$

INECUACIONES

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $\mathbf{3x - 2 \le 10}$ **b)** $\mathbf{x - 2 > 1}$

c) $\mathbf{2x + 5 \ge 6}$ **d)** $\mathbf{3x + 1 \le 15}$

a) $3x - 2 \le 10 \;\rightarrow\; 3x \le 12 \;\rightarrow\; x \le 4$

Soluciones: $\{x \,/\, x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \;\rightarrow\; x > 3$

Soluciones: $\{x \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \;\rightarrow\; 2x \ge 1 \;\rightarrow\; x \ge \dfrac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \ge \dfrac{1}{2}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \;\rightarrow\; 3x \le 14 \;\rightarrow\; x \le \dfrac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \le \dfrac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{14}{3}\right]$

2. **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

Obserevamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones*: $\{x \,/\, 3 < x \leq 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \leq \dfrac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones*: $\left\{x \,/\, \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{14}{3}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{14}{3}\right]$

3. **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

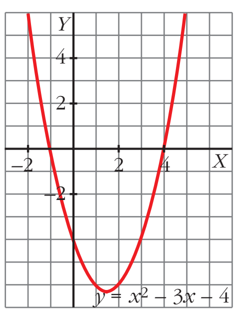
a) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$

d) $x^2 - 4 \leq 0$

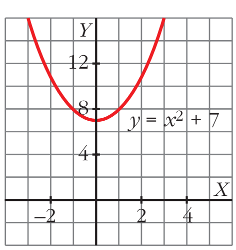
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \;\rightarrow\;$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución

d) $x^2 - 4 \leq 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$.

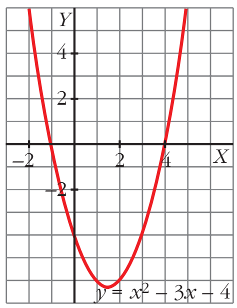
Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)



$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son lon puntos del intervalo [–2, 2]. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

  $x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

PARA PRACTICAR

Factorización

1 **Descompón en factores estos polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ **d)** $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$

e) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$ **f)** $x^5 - 16x$

g) $4x^2 - 25$ **h)** $4x^2 + 4x + 1$

a) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) \rightarrow$ Raíces: $-1, 1, 2$

b) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) \rightarrow$ Raíces: $1, -1, 2, -2$

c) $(x - 1)(x + 2)(4x - 10) \rightarrow$ Raíces: $1, -2, \frac{10}{4}$

d) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x^2 + x + 1) \rightarrow$ Raíces: $1, 2, 5$

e) $(x + 2)(x - 2)(2x - 1)(3x - 1) \rightarrow$ Raíces: $-2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

f) $x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \rightarrow$ Raíces: $0, 2, -2$

g) $(2x + 5)(2x - 5) \rightarrow$ Raíces: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

h) $(2x + 1)^2 \rightarrow$ Raíz: $-\frac{1}{2}$

2 **Halla, en cada uno de los siguientes casos, el máx.c.d. [$A(x)$, $B(x)$] y el mín.c.m. [$A(x)$, $B(x)$]:**

a) $A(x) = x^2 + x - 12;\ \ B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1;\ \ B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2;\ \ B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)(x + 4);\ \ B(x) = x(x - 3)(x + 3)$

máx.c.d. $= (x - 3)$

mín.c.m. $= x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)(x + 1)^2;\ \ B(x) = x(x - 1)(x + 1)$

máx.c.d. $= (x - 1)(x + 1)$

mín.c.m. $= x(x - 1)(x + 1)^2$

c) $A(x) = x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$; $B(x) = (x-1)(x^2+1)$

máx.c.d. $= (x-1)(x^2+1)$

mín.c.m. $= x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones, factorizando previamente:**

a) $\boldsymbol{x^3 - 7x - 6 = 0}$

b) $\boldsymbol{2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0}$

d) $\boldsymbol{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0}$

e) $\boldsymbol{x^5 - 16x = 0}$

f) $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 2x = 0}$

g) $\boldsymbol{x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0}$

a)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
-1 & & -1 & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$x_1 = -1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$

b)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -9 & 10 \\
1 & & 2 & -1 & -10 \\
\hline
 & 2 & -1 & -10 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & 10 & \\
\hline
 & 2 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = \dfrac{5}{2}$

c)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\
1 & & 1 & -4 & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 5 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & & \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}
$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -10 & 9 & -2 \\ 1 & & 3 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & & 6 & -2 & \\ \hline & 3 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = \dfrac{1}{3}$

e) $x(x^4 - 16) = 0$; $x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

f) $x(x^2 - 3x + 2) = 0$; $x(x - 1)(x - 2) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$

g)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 1$

Fracciones algebraicas

4 **Simplifica las fracciones:**

a) $\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 3x}$

b) $\dfrac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x}$

a) $\dfrac{(3 - x)(3 + x)}{x(x - 3)} = \dfrac{-(3 + x)}{x}$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ 2 & & 6 & 8 & 2 \\ \hline & 3 & 4 & 1 & \boxed{0} \\ -1 & & -3 & -1 & \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\dfrac{(x - 2)(x + 1)(3x + 1)}{x(x - 2)(x + 2)} = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x}$

5 **Opera y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{3a + 3}{12a - 12} : \dfrac{(a + 1)^2}{a^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{x}{x - 2} - \dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\left(\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x}{x + 2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x + 2}\right)$

e) $\left(1 - \dfrac{x + 1}{x + 2} \cdot \dfrac{x + 3}{x + 2}\right) : \dfrac{1}{x + 2}$

a) $\dfrac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)} = 0$

d) $\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)} : \dfrac{x+2+x}{x+2} = \dfrac{3x+2}{x(x+2)} \cdot \dfrac{x+2}{2x+2} =$

$= \dfrac{3x+2}{x(2x+2)} = \dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2+4+4x-x^2-4x-3}{(x+2)^2} \cdot (x+2) = \dfrac{1}{x+2}$

6 **Demuestra las siguientes identidades:**

a) $\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-2}\right) : \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}\right) = 2x-5$

a) $\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right) \cdot \left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right) \cdot \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)} : \dfrac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)} = \dfrac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)} = 1$

c) $\left(\dfrac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)}\right) : \left(\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\right) =$

$= \dfrac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)} : \dfrac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)} =$

$= \dfrac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)} : \dfrac{1}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = 2x-5$

Ecuaciones de primer y segundo grado

7 **Entre estas ecuaciones de primer grado, hay dos que no tienen solución, dos que tienen infinitas soluciones y dos que tienen solución única. Identifica cada caso y resuelve las que sean posible:**

a) $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$

b) $x + \dfrac{3-x}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}x$

c) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

d) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

e) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

f) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $2x + 2 = 4x - 2x - 3; \;\; 5 = 0$

No tiene solución.

b) $3x + 3 - x - 3 = 2x; \;\; 0 = 0$

Infinitas soluciones.

c) $\dfrac{x^2+1+2x}{16} - \dfrac{8+8x}{16} = \dfrac{x^2+1-2x}{16} - \dfrac{8+4x}{16}$

$2x - 8 - 8x = -2x - 8 - 4x; \;\; 0 = 0$

Infinitas soluciones.

d) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x^2+1-2x) = 1{,}25x - (0{,}25x^2 + 4 + 2x)$

$0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25x^2 - 0{,}25 + 0{,}5x = 1{,}25x - 0{,}25x^2 - 4 - 2x$

$1{,}45x = -4{,}35$

$x = -3$

e) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x; \;\; 9 = 0$

No tiene solución.

f) $4x + 2 - 7(x^2 - x - 2) = 7x - 14 - 7(x^2 + 4 - 4x)$

$4x + 2 - 7x^2 + 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$58 = 24x$

$x = \dfrac{29}{12}$

8 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \dfrac{x^2+2}{2}$

b) $0{,}5(x-1)^2 - 0{,}25(x+1)^2 = 4 - x$

c) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1) = (x+1)^2 - 9$

d) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)^2 - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{x-1}{4}$

e) $\dfrac{x(x-3)}{2} + \dfrac{x(x+2)}{4} = \dfrac{(3x-2)^2}{8} + 1$

f) $0,\widehat{3}x^2 - x - 1,\widehat{3} = 0$

☛ ***Expresa los decimales periódicos en forma de fracción y obtendrás soluciones enteras.***

a) $2x^2 - 2 + 6(x^2 + 4 - 4x) = 3x^2 + 6$

$2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$

$5x^2 - 24x + 16 = 0$

$x = \dfrac{24 \pm 16}{10} = \begin{cases} 4 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 4; \ \ x_2 = \dfrac{4}{5}$

b) $0,5(x^2 + 1 - 2x) - 0,25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$0,5x^2 + 0,5 - x - 0,25x^2 - 0,25 - 0,5x = 4 - x$

$0,25x^2 - 0,5x - 3,75 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3; \ \ x_2 = 5$

c) $0,25x^2 - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$

$0 = 0,75x^2 + 2x - 7$

$x = \dfrac{-2 \pm 5}{1,5} = \begin{cases} 2 \\ -70/15 = -14/3 \end{cases}$

$x_1 = 2; \ \ x_2 = -\dfrac{14}{3}$

d) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{4} + 4 - 2x\right) - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{2x-2}{8}$

$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2; \ \ 3x^2 - 23x + 44 = 0$

$x = \dfrac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$

$x_1 = 4; \ \ x_2 = \dfrac{11}{3}$

e) $4x(x-3) + 2x(x+2) = 9x^2 + 4 - 12x + 8$

$4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x = 9x^2 + 4 - 12x + 8$

$0 = 3x^2 - 4x + 12 \ \rightarrow$ No tiene solución.

f) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3x}{3} - \dfrac{4}{3} = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x_1 = 4, \ \ x_2 = -1$

Ecuaciones bicuadradas

10 **Resuelve estas ecuaciones bicuadradas y comprueba las soluciones:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = -1$

c) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \to$ No tiene solución

d) $x^2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2\sqrt{2};\ x_4 = -2\sqrt{2}$

11 **Resuelve:**

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\dfrac{3x^4 - 1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x^4 - 2 - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

a) $(x^2 - 2)^2 = 1 \to x^4 - 4x^2 + 4 = 1$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$x^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) $3x^4 - 1 + 2x^4 - 4 - x^2 = x^4 - 5$

$4x^4 - x^2 = 0$

$x^2\ (4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{1}{2};\ x_3 = -\dfrac{1}{2}$

Ecuaciones con radicales

12 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$ **b)** $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c) $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$ **d)** $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 5} = 0$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x; \;\; 0 = 4x^2 + 7x + 3$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{-7 \pm 1}{8} = \begin{cases} -1 \\ -3/4 \end{cases}$$

$x_1 = -1; \;\; x_2 = -\frac{3}{4}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x; \;\; 0 = x^2 + x - 6$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$x = -3$

c) $2 - 5x = 3x^2; \;\; 0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$x = -2$

d) $2x + 3 = x - 5; \;\; x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

13 **Resuelve:**

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$ **b)** $\sqrt{\frac{7x + 1}{4}} = \frac{5x - 7}{6}$ **c)** $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 1} = 3$

a) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$

$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x; \;\; 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$x = 2$

b) $\frac{7x + 1}{4} = \frac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x; \;\; 0 = 25x^2 - 133x + 40$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 5$

c) Aislamos un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \to 6\sqrt{x+1} = 12 \to \sqrt{x+1} = 2$

Repetimos el proceso: $x + 1 = 4 \to \ x = 3$

Comprobamos la solución, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, vemos que es válida.

Ecuaciones con la x en el denominador

14 **Resuelve estas ecuaciones y comprueba la validez de las soluciones:**

a) $\dfrac{x+2}{x} + 3x = \dfrac{5x+6}{2}$ **b)** $\dfrac{8}{x+6} + \dfrac{12-x}{x-6} = 1$

c) $\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} - \dfrac{x-1}{2-x}$

☛ ***Ten en cuenta que*** $2 - x = -(x-2)$.

d) $\dfrac{x}{x-6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{x+6}{6-x}$ **e)** $\dfrac{3x+1}{x^3} + \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{2x+3}{x^2}$

f) $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}\,x$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$x^2 - 4x + 4 = 0; \ \ x = 2$

b) $8(x-6) + (12-x)(x+6) = x^2 - 36$

$8x - 48 + 12x + 72 - x^2 - 6x = x^2 - 36$

$0 = 2x^2 - 14x - 60$

$0 = x^2 - 7x - 30$

$x = \dfrac{7 \pm 13}{2} = \begin{cases} 10 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = 10; \ \ x_2 = -3$

c) $(x-2)^2 = x^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 4 - 4x = x^2 + x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 + 2x - 3$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} 1 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$

$x = -3$

d) $6x - 3(x - 6) = x(x - 6) - 6(x + 6)$

$6x - 3x + 18 = x^2 - 6x - 6x - 36$

$0 = x^2 - 15x - 54$

$x = \dfrac{15 \pm 21}{2} = \begin{cases} 18 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3; \;\; x_2 = 18$

e) $3x + 1 + x^2(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x$

$3x + 1 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 + 3x$

$0 = x^2 - 1$

$x_1 = 1; \;\; x_2 = -1$

f) $x^2 + 2 = 2x^2; \;\; 2 = x^2$

$x_1 = \sqrt{2}; \;\; x_2 = -\sqrt{2}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

15 **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $3^x = \sqrt[3]{9}$

☛ ***Expresa*** $\sqrt[3]{9}$ ***como potencia de base 3.***

b) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

☛ ***Multiplica el primer miembro.***

c) $5 \cdot 7^{-x} = 35$

☛ ***Divide los dos miembros por 5.***

d) $(0,5)^x = 16$

☛ ***0,5 es una potencia de base 2.***

e) $\sqrt{7^x} = \dfrac{1}{49}$

f) $2^{1/x} = 16$

g) $\dfrac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$

h) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{8}{125}$

i) $2^x \cdot 5^x = 0,1$

☛ ***Recuerda que*** $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$.

a) $3^x = 3^{2/3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $2^{2x+1} = 2^3 \Rightarrow x = 1$

c) $7^{-x} = 7 \Rightarrow x = -1$

d) $2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$

e) $7^{x/2} = 7^{-2} \Rightarrow x = -4$

f) $2^{1/x} = 2^4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

g) $3^{3x-2-x-3} = 3^4 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$

i) $10^x = 10^{-1} \Rightarrow x = -1$

16 **Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:**

a) $\frac{1}{e^x} = 27$ **b)** $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$ **d)** $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

a) $\frac{1}{e^x} = 27 \rightarrow \frac{1}{27} = e^x \rightarrow ln\ \frac{1}{27} = ln\ e^x$

$x = ln\ \frac{1}{27} = ln\ 1 - ln\ 27 = 0 - ln\ 27 \rightarrow x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \rightarrow ln\ e^{x-9} = ln\ \sqrt{73}$

$x - 9 = \frac{1}{2}\ ln\ 73 \rightarrow x = 9 + \frac{ln\ 73}{2} \rightarrow x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81;\ x\ log\ 6 = log\ 81$

$x = \frac{log\ 81}{log\ 6} \approx 2{,}453$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3;\ x\ log\ \frac{2}{3} = log\ 3$

$x = \frac{log\ 3}{log\ 2 - log\ 3} \approx -2{,}710$

17 **Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $2^{x} + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

e) $9^{x} - 3^{x} - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^{x} + 7 = 0$

a) $2^x + \dfrac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \rightarrow z + \dfrac{2}{z} = 3;\ \ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ \ z = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1;\qquad 2^x = 1 \rightarrow x_2 = 0$

b) $2 \cdot 2^x + \dfrac{2^x}{2} = \dfrac{5}{2};\ \ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ \ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \dfrac{(2^x)^3}{2} = \dfrac{17}{16} \rightarrow 2^x = z \rightarrow 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128 + 8)\,(z)^3 = 17;\ \ (z)^3 = \dfrac{17}{136} = \dfrac{1}{8} \rightarrow z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ \ 3^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ \ 7^x = \dfrac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ \ x_2 = 1$

18 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{\log (x^2 + 1) - \log (x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}}$

b) $\boldsymbol{\ln (x - 3) + \ln (x + 1) = \ln 3 + \ln (x - 1)}$

c) $\boldsymbol{2\ln (x - 3) = \ln x - \ln 4}$

d) $\boldsymbol{\log (x + 3) - \log (x - 6) = 1}$

a) $\log \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \log \frac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13; \quad 25 = x^2$

$x_1 = -5; \quad x_2 = 5$

b) $\ln (x^2 - 2x - 3) = \ln (3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3; \quad x^2 - 5x = 0$

$x = 5 \quad (x = 0 \quad \text{no vale})$

c) $\ln (x - 3)^2 = \ln \frac{x}{4}$

$x^2 + 9 - 6x = \frac{x}{4}$

$4x^2 + 36 - 24x = x; \quad 4x^2 - 25x + 36 = 0$

$x = \frac{25 \pm 7}{8} = \begin{cases} 4 \\ 9/4 \quad \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 4$

d) $\log \frac{x + 3}{x - 6} = 1$

$x + 3 = 10x - 60; \quad 63 = 9x$

$x = 7$

19 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{\log (x + 9) = 2 + \log x}$

b) $\boldsymbol{\log \sqrt{3x + 5} + \log \sqrt{x} = 1}$

c) $\boldsymbol{2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0}$

☛ ***Haz*** $\boldsymbol{\log x = y}$.

d) $\boldsymbol{\log (x^2 - 7x + 110) = 2}$

e) $\boldsymbol{\log (x^2 + 3x + 36) = 1 + \log (x + 3)}$

f) $\boldsymbol{\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3}$

a) $\log \frac{x + 9}{x} = 2$

$x + 9 = 100x; \quad 9 = 99x; \quad x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$

$x = \frac{1}{11}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$

$8y = 24; \quad y = 3; \quad x = 4$

$x = 4; \quad y = 3$

b) $4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; \quad x = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{4}$

$x = \dfrac{1 + 3y}{2} = \dfrac{2 + 6y}{4}$

$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \;\to\; x = 8 \\ -1 \;\to\; x = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1, \; y_1 = -1; \; x_2 = 8, \; y_2 = 5$

c) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$$x = \frac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \;\to\; y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \;\to\; y = 6 \end{cases}$$

$x = 6; \; y = 6 \;\; (x = 27, \; y = 48$ no vale)

d) $y = 2x - 5$

$\sqrt{3x - 5} = x - 1$

$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 - 5x + 6$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \;\to\; y = 1 \\ 2 \;\to\; y = -1 \end{cases}$$

$x_1 = 2, \; y_1 = -1; \; x_2 = 3, \; y_2 = 1$

22 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

a) $y - x = 1$

$2^x + 2^y = 12$

$y = 1 + x \;\to\; 2^x + 2^{1+x} = 12 \;\to\; 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \;\to$

$\to\; 3 \cdot 2^x = 12 \;\to\; 2^x = 4 \;\to\; x = 2 \;\to\; y = 1 + 2 = 3$

$x = 2; \quad y = 3$

b) $5^x \cdot 5^y = 1$

$5^x : 5^y = 25$

$$\left.\begin{array}{l} 5^{x+y} = 5^0 \rightarrow x + y = 0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \rightarrow x - y = 2 \end{array}\right\}$$

$2x = 2 \rightarrow x = 1$

$1 + y = 0 \rightarrow y = -1$

23 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

a) $2 \log x = 2$

$x = 10; \quad y = 100$

b) $\log_2 x + 3 \log_2 y = 5$

$2 \log_2 x - \log_2 y = 3$

$$\begin{array}{l} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \underline{6 \log_2 x - 3 \log_2 y = 9} \\ 7 \log_2 x \qquad\qquad = 14 \end{array}$$

$x = 4; \quad y = 2$

c) $2 \log x + \log y = 2$

$\log x - 2 \log y = 6$

$$\begin{array}{l} 4 \log x + 2 \log y = 4 \\ \underline{\log x - 2 \log y = 6} \\ 5 \log x \qquad\qquad = 10 \end{array} \rightarrow \log x = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 100 \\ y = \dfrac{1}{100} \end{array}\right\}$$

d) $\log \dfrac{x}{y} = 1; \quad \dfrac{x}{y} = 10; \quad x = 10y$

$100y^2 - y^2 = 11; \quad 99y^2 = 11; \quad y^2 = \dfrac{1}{9} \quad \rightarrow \quad y = \pm \dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{10}{3}; \quad y = \dfrac{1}{3}$

$\left(y = -\dfrac{1}{3} \text{ no vale}\right)$

e) $\left.\begin{array}{l} x = 25 + y \\ log\,\dfrac{y}{x} = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 0{,}1x \\ 0{,}9x = 25 \end{array}$

$x = \dfrac{250}{9}$; $y = \dfrac{25}{9}$

f) $\left.\begin{array}{l} ln\,x - ln\,y = 2 \\ ln\,x + ln\,y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones, queda:
$2\,ln\,x = 6 \;\rightarrow\; ln\,x = 3 \;\rightarrow\; x = e^3$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$2\,ln\,y = 2 \;\rightarrow\; ln\,y = 1 \;\rightarrow\; y = e$

Solución: $x = e^3$; $y = e$

Método de Gauss

24 **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{rrrcr} x & - y & - z & = & -10 \\ x & + 2y & + z & = & 11 \\ 2x & - y & + z & = & 8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{rrrcr} x & - y & - z & = & -10 \\ 2x & + y & & = & 1 \\ 3x & - 2y & & = & -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 2.^a \end{array}$

$\left.\begin{array}{rrrcr} x & - y & - z & = & -10 \\ 2x & + y & & = & 1 \\ 7x & & & = & 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{rrrcr} x & + y & + z & = & 3 \\ 2x & - y & + z & = & 2 \\ x & - y & + z & = & 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{rrrcr} x & + y & + z & = & 3 \\ 3x & & + 2z & = & 5 \\ 2x & & + 2z & = & 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$

$\left.\begin{array}{rrrcr} x & + y & + z & = & 3 \\ 3x & & + 2z & = & 5 \\ -x & & & = & -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$

25 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 1.^a\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 6 \cdot 2.^a\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \dfrac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

26 **Resuelve por el método de Gauss:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \dfrac{-5}{2} \\ x = \dfrac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{-5}{2} \end{array}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$

27 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right.$

☛ ***Encontrarás sistemas compatibles (determinados e indeterminados) y sistemas incompatibles.***

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 5 \cdot 3.^a \\ 3.^a \end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{array}$ $\left.\right\}$ $\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a : 6 \end{array}}$

$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{array}\right\}$ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.
El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to (5 - 5z) + y = 2 - 3z \to y = 2z - 3 \\ \to x = 5 - 5z \end{array}$$

Solución: $x = 5 - 5z, \ y = 2z - 3, \ z = z$

d) $$\left.\begin{array}{rl} 2x - y - z &= 2 \\ 3x - 2y - 2z &= 2 \\ -5x + 3y + 5z &= -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 5 \cdot 1.^a \end{array} \left.\begin{array}{rl} 2x - y - z &= 2 \\ -x &= -2 \\ 5x - 2y &= 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{5x - 9}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 2, \ y = \dfrac{1}{2}, \ z = \dfrac{3}{2}$

e) $$\left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 3 \\ -x + 2y + z &= 5 \\ x + 4y + 3z &= 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 3 \\ 3y + 2z &= 8 \\ 3y + 2z &= -2 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $$\left.\begin{array}{rl} -2x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y - z &= 0 \\ -x + 4y + z &= 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \left.\begin{array}{rl} -2x + y + z &= 1 \\ x + 3y &= 1 \\ x + 3y &= 1 \end{array}\right\}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$$\left.\begin{array}{l} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{array}\right\} \to -2(1 - 3y) + z = 1 - y \to z = 3 - 7y$$

Solución: $x = 1 - 3y, \ z = 3 - 7y$

Inecuaciones

28 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$ **b)** $\dfrac{x - 1}{2} > x - 1$ **c)** $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$ **e)** $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ **f)** $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x; \ \ 10x > -10; \ \ x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2; \ \ 1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x+5)<0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$[-3, 5]$

29 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

☛ ***Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.***

a) $\left.\begin{matrix} x < 1 \\ x > -4 \end{matrix}\right\} \ (-4, 1)$

b) $\left.\begin{matrix} x > -\frac{5}{3} \\ x > 4 \end{matrix}\right\} \ (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{matrix} x > 17 \\ x > \frac{19}{5} \end{matrix}\right\} \ (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{matrix} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{matrix}\right\}$ No tiene solución.

30 **Resuelve:**

a) $x^2 - 7x + 6 \le 0$

b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $(x+1)\,x^2\,(x-3) > 0$

d) $x(x^2+3) < 0$

a) $\frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$[1, 6]$

b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

c) $\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x+1>0 \\ x-3>0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x>-1 \\ x>3 \end{matrix}\right\} (3, +\infty) \\ \\ \left.\begin{matrix} x+1<0 \\ x-3<0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x<-1 \\ x<3 \end{matrix}\right\} (-\infty, -1) \end{matrix}\right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

d) $(-\infty, 0)$

31 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $\frac{2}{x-3} > 0$ **b)** $\frac{3x+5}{x^2+1} \geq 0$ **c)** $\frac{x^2}{x+4} < 0$ **d)** $\frac{x-3}{x+2} < 0$

a) $x - 3 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$

b) $3x + 5 \geq 0;\ x \geq -\frac{5}{3} \rightarrow \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

c) $x + 4 < 0;\ x < -4 \rightarrow (-\infty, -4)$

d) $\left.\begin{array}{l} x-3>0 \\ x+2<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2 \end{array}\right\} \rightarrow \varnothing$

$\left.\begin{array}{l} x-3<0 \\ x+2>0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x<3 \\ x>-2 \end{array}\right\} \rightarrow (-2, 3)$

43 **Resuelve:**

a) $3x^4 - 75x^2 = 0$ **b)** $\sqrt{4x+5} = x + 2$

c) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$ **d)** $\frac{1}{x+2} + \frac{x}{5(x+3)} = \frac{3}{10}$

e) $x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

f) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3) = 0$ **g)** $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0$

a) $3x^2(x^2 - 25) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 5;\ x_3 = -5$

b) $4x + 5 = x^2 + 4 + 4x;\ 1 = x^2 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = -1$

c) $2x - 3 = 4 + x - 5 + 4\sqrt{x-5}$

$x - 2 = 4\sqrt{x-5}$

$x^2 + 4 - 4x = 16(x-5)$

$x^2 + 4 - 4x = 16x - 80$

$x^2 - 20x + 84 = 0$

$x = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \\ 6 \end{cases}$

$x_1 = 6;\ x_2 = 14$

d) $\dfrac{10(x+3)+2x(x+2)}{10(x+2)(x+3)} = \dfrac{3(x^2+5x+6)}{10(x+2)(x+3)}$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$x = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -4$

e) $x_1 = 0;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 2;\ \ x_4 = \dfrac{1}{2}$

f) $x_1 = 3;\ \ x_2 = -3$

g) $x = 0$

$\sqrt{x} = x - 2$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 4\ \ (x = 1$ no vale)

44 **Resuelve:**

a) $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = 4$ **b)** $|x^2 - 1| = 3$

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = 4 \Rightarrow x - 3 = 8 \Rightarrow x = 11 \\ \dfrac{x-3}{2} = -4 \Rightarrow x - 3 = -8 \Rightarrow x = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 11 \\ x_2 = -5 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ (no vale)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}$

45 **Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:**

a) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$ **b)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0$ **c)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x^2} = 0$

d) $\dfrac{2}{5x} - \dfrac{5x^3}{2} = 0$ **e)** $\dfrac{x+1}{x^2} - \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x^3 + x^2} = 0$

a) $\dfrac{27x^3 + 125}{45x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}} = \dfrac{-5}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-5}{3}$

b) $\dfrac{81x^4 - 16}{8 \cdot 81x^3} = 0 \Rightarrow x^4 = \dfrac{16}{81} = \dfrac{2^4}{3^4} \Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{3};\ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

c) $x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

d) $4 - 25x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{4}{25}$

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{10}}{5};\ x_2 = \frac{-\sqrt{10}}{5}$$

e) $(x + 1)(x + 1) - x \cdot x^2 - 1 = 0$

$x^2 + 2x + 1 - x^3 - 1 = 0$

$-x^3 + x^2 + 2x = 0$

$-x(x^2 - x - 2) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

50 **Queremos repartir, mediante un sistema de ecuaciones, 330 euros entre tres personas de forma que la primera reciba 20 euros más que la segunda y la tercera la mitad de lo que han recibido entre las otras dos.**

¿Cómo lo hacemos?

Llamamos x a los euros que recibe la primera; y a los que recibe la segunda, y z a los que recibe la tercera. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x = y + 20 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 1.^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 3x + 3y = 660 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y = 220 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 2x = 240 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 120 \\ y = x - 20 = 100 \\ z = 330 - x - y = 110 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 120$ € recibe la 1.ª; $y = 100$ € recibe la 2.ª; $z = 110$ € recibe la 3.ª

CUESTIONES TEÓRICAS

52 **¿Qué valores ha de tomar el parámetro k para que $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga soluciones reales?**

$36 - 4k < 0;\ \ 36 < 4k;\ \ 9 < k;\ \ k > 9$

53 **Halla m para que al dividir el polinomio**

$$2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$$

entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 9 & 2 & -6 & m \\ -4 & & -8 & -4 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 2 & \boxed{m-8} \end{array}$$

$m - 8 = 12 \ \Rightarrow\ m = 20$

54 **Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.**

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x - 1);\quad Q(x) = x^2(x - 1)$

55 **Justifica por qué este sistema de ecuaciones no puede tener solución:**

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right.$$

La primera y la tercera ecuación son contradictorias.

56 **Invéntate ecuaciones que tengan por soluciones los valores:**

a) $3,\ -3,\ \sqrt{7}$ **y** $-\sqrt{7}$

b) $5;\ 0{,}3$ **y** -2

c) $0,\ \frac{1}{2}$ **y** $0{,}7$

d) $0,\ 1,\ -1$ **y** $\frac{1}{3}$

a) $(x - 3)(x + 3)\left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = (x^2 - 9)(x^2 - 7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x - 5)(x - 0{,}3)(x + 2) = x^3 - 3{,}3x^2 - 9{,}1x + 3$

c) $x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 0{,}7) = x(x - 0{,}5)(x - 0{,}7) = x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}35x$

d) $x(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x$

58 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^4 - 4x^2 < 0$

b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\dfrac{4 - x^2}{(x - 3)^2} > 0$

d) $\dfrac{-2}{(x - 1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

$x \neq 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

b) $x(x^2 - x - 6) < 0$

$x(x - 3)(x + 2) < 0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left.\begin{array}{l} x \neq 3 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array}\right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1$; $(1, +\infty)$

AUTOEVALUACIÓN

1. **Resuelve factorizando previamente.**

$$\mathbf{3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0}$$

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

	3	1	–9	–9	–2
–1		–3	2	7	2
	3	–2	–7	–2	0
2		6	8	2	
	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2. **Opera y simplifica el resultado.**

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x^2 + x)(x-1)}{3x(x^2-1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)3x} = \frac{1}{3(x+1)}$$

3. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\sqrt{8+2x} - x = x + 6$

c) $\dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{3}$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x+1)$

g) $|3x + 1| = |x - 3|$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6 \;\rightarrow\; \sqrt{8 + 2x} = 2x + 6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$\left(\sqrt{8 + 2x}\right)^2 = (2x + 6)^2 \;\rightarrow\; 8 + 2x = 4x^2 + 36 + 24x \;\rightarrow\; 4x^2 + 22x + 28 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 + 11x + 14 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{-11 \pm 3}{4} = \begin{cases} -2 \\ -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Comprobada sobre la ecuación inicial, el resultado $-\dfrac{7}{2}$ resulta ser no válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = -2$.

c) $\dfrac{3x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; \dfrac{9x}{3(x^2 - 4)} = \dfrac{3x(x - 2) - 4(x^2 - 4)}{3(x^2 - 4)} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 9x = 3x^2 - 6x - 4x^2 + 16 \;\rightarrow\; x^2 + 15x - 16 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} = \frac{-15 \pm 17}{2} = \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = -16$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; 3^{x-1} = 3^{-1/2} \;\rightarrow\; x - 1 = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \;\rightarrow\; (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y = 4 \;\rightarrow\; 2^x = 4 \;\rightarrow\; 2^x = 2^2 \;\rightarrow\; x = 2$

$y = 2 \;\rightarrow\; 2^x = 2 \;\rightarrow\; 2^x = 2^1 \;\rightarrow\; x = 1$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

f) $ln\, x + ln\, 4 = 2\, ln\, (x + 1) \to ln\, 4x = ln\, (x + 1)^2 \to 4x = (x + 1)^2 \to$

$\to x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x - 1)^2 = 0 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

g) $|3x + 1| = |x - 3|$ $\begin{cases} 3x + 1 = x - 3 \to 2x = -4 \to x = -2 \\ 3x + 1 = -(x - 3) \to 4x = 2 \to x = 1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -2;\; x_2 = \dfrac{1}{2}$

4. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} y = 2x \\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x = -9 \end{aligned}$

Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z^2 - 6z + 9 = 0 \to z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$

$3^x = 3 \to x = 1$

$x = 1 \to y = 2$

Solución: $x = 1;\; y = 2$

b) $\left.\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3 \\ x + y + 3z &= 0 \\ -2x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{2.^a - 1.^a} \\ \xrightarrow{3.^a + 2 \cdot 1.^a} \end{matrix} \left.\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3 \\ -y + z &= -3 \\ 7y + 7z &= 7 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{3.^a + 7 \cdot 2.^a} \left.\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3 \\ -y + z &= -3 \\ 14z &= -14 \end{aligned}\right\}$

$14z = -14 \to z = -1$

$-y + z = -3 \to -y - 1 = -3 \to y = 2$

$x + 2y + 2z = 3 \to x + 4 - 2 = 3 \to x = 1$

Solución: $x = 1;\; y = 2;\; z = -1$

5. Resuelve:

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1)$ **b)** $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1) \to x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \to$

$\to -4x - 4 < 0 \to 4x > -4 \to x > -1$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de serlo.

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, $(x + 1)^2 \geq 0$ para cualquier valor de x.

Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador ha de ser cero.

Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

Solución: $x \in (-3, +\infty)$